Compléments à l'article

LES DISCRIMINANTS QUADRATIQUES ET LA CONGRUENCE DE STICKELBERGER

1. The submitted paper contained a fifth section devoted to the comparison between Fröhlich's *idelic discriminants* and the usual notion. This unpublished part can be read below.

2. The results of the main paper have been improved by Georges Gras ; see

Stickelbergers congruences for absolute norms of relative discriminants, J. Th. Nombres Bordeaux **22,2** (2010), 397–402.

N.B. Les notations et les références sont celles de **"Les discriminants quadratiques et la congruence de Stickelberger".**

5. Remarques sur le discriminant idélique. On reprend les notations du paragraphe 2. Le discriminant $\mathfrak{d}_T(M)$ est par définition déterminé par les discriminants locaux $d_\mathfrak{p} \in K^*/A_\mathfrak{p}^{*2}$. Ces discriminants locaux déterminent également $d_T(V)$ sauf dans le cas trivial où $A = K$. Réciproquement, les données de $\mathfrak{d}_T(M)$ et de $d_T(V)$ déterminent les $d_\mathfrak{p}$. En effet, choisissons une uniformisante π de A en $\mathfrak{p}$, et écrivons $d_\mathfrak{p} = \pi^x \,.\, u$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $u \in A_\mathfrak{p}^*$. On a $x = v_\mathfrak{p}\ (\mathfrak{d})$, et la classe de u, égale à $\pi^{-x} \,.\, d_{L/K} \mod K^{*2}$ est bien définie modulo $A_\mathfrak{p}^* \cap K^{*2} = A_\mathfrak{p}^{*2}$.

Pour définir un discriminant idélique, on considère un ensemble $S = S_f \cup S_\infty$ de places de K, où S_f est l'ensemble des places (finies) associées aux idéaux premiers non nuls de A et S_∞ est un ensemble fini de plongements de K dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $v \in S$, la forme bilinéaire T se prolonge en une forme T_v sur le complété $V_v = K_v \otimes V$ de V, ce qui permet de définir le discriminant $d_{T_v}(V_v) \in K_v^*/K_v^{*2}$, que nous notons d'_v lorsque $v \in S_\infty$. Lorsque v est une place finie, dont nous notons $\mathfrak{O}_v$ l'anneau de valuation, on note d'_v le discriminant $d_{T_v}(\mathfrak{O}_v \otimes_A M) \in K_v^*/\mathfrak{O}_v^{*2}$. Dans le cas d'une extension (ou d'une algèbre étale) L/K, ce discriminant n'est autre que celui de la K_v- algèbre étale $L_v = K_v \otimes L$ que l'on obtient en complétant L à la place v de K.

Pour tout $v \in S$, le groupe U_v des *unités locales* est défini par $U_v = \mathfrak{O}_v^*$ si $v \in S_f$, $U_v = K_v^{*+}$ si v est réelle, et $U_v = K_v^*$ si v est complexe ; on a donc $U_v = K_v^{*2}$ pour tout $v \in S_\infty$. Par définition, *le groupe* J_K *des idèles de* K (pour le choix que nous avons fait de S) est le produit direct restreint des groupes K_v^* par rapport à leurs sous-groupes U_v. Les éléments du sous-groupe $U_K = \prod_v U_v$ de J_K sont les *idèles unités de* K. Lorsque K est un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions sur un corps fini), on convient de prendre pour S l'ensemble de *toutes les places* de K. Comme d'_v est dans U_v pour presque tout v, la famille (d'_v) définit un élément $\delta \in J_K/U_K^2$: c'est le *discriminant idélique* introduit par Fröhlich ([2], [3]). Notons qu'il appartient au sous-groupe $K^*\, J_K^2/U_K^2$ du groupe précédent : c'est clair si M est libre sur A, et le cas général se ramène à ce cas particulier en comparant les discriminants d'_v associés à M d'une part et à un module libre d'autre part.

Dans le cas où K est un *corps global*, la donnée du discriminant idélique est équivalente à la donnée du couple $(\mathfrak{d}_T(M)\,, d_T(V))$. En effet, sans hypothèse sur K, le couple
$(\mathfrak{d}_T(M)\,, d_T(V))$ détermine $d_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier non nul de K, donc aussi d'_v pour pour tout $v \in S_f$ puisque d'_v est alors l'image dans $K_v^*/\mathfrak{O}_v^{*2}$ du discriminant $d_\mathfrak{p}$ correspondant, et, pour $v \in S_\infty$, d'_v est évidemment l'image dans K_v/K_v^{*2} de $d_T(V)$. Réciproquement, supposons que nous connaissions le discriminant idélique $\delta \in J_K/U_K^2$. Pour tout $v \in S$, nous connaissons d'_v. L'ensemble des valuations des d'_v pour $v \in S_f$ détermine évidemment le discriminant idéal $\mathfrak{d}_T(M)$. Il reste à voir que $d_T(M) \in K^*/K^{*2}$ est également déterminé par les d'_v. Cela résulte tout de suite du théorème de Hasse-Minkowski : un élément de K^* qui est un carré localement partout est effectivement un carré.