COMPLÉMENT à

L'ARITHMÉTIQUE des ALGÈBRES de QUATERNIONS

À la fin du sous-paragraphe 14.3 du cours « L'ARITHMÉTIQUE des ALGÈBRES de QUATERNIONS » , je suggère que la classification de *toutes* les algèbres de quaternions dans laquelle la simplification des modules projectifs sur les ordres maximaux est vraie pourrait peut-être s'obtenir, grâce en particulier aux minorations «analytiques» des discriminants des corps de nombres résultant des travaux de Diaz y Diaz, Odlyzko, Poitou et Serre. (Le théorème de Marie-France VIGNÉRAS cité dans le § 14 assure qu'il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres à considérer.)

Ce travail a été fait en 2004 par Emmanuel HALLOUIN et Christian MAIRE à l'Université de Toulouse 2 :

Cancellation in totally definite quaternion algebras,
J. reine angew. Math, **595** (2006), 189-214.

Comme M.-F. Vignéras, les auteurs considèrent plus généralement les *ordres de Eichler* – ce sont les ordres héréditaires, sur lesquels tous les modules sans torsion sont projectifs ; les ordres maximaux sont les ordres d'Eichler pour lesquels les modules projectifs sont localement libres. La propriété de simplification est satisfaite par 81 ordres maximaux et 47 ordres d'Eichler non maximaux. (Comme d'habitude, on considère les ordres à conjugaison près.)

[Signalons une petite inexactitude dans le sous-paragraphe 14.3 : L'article de Marie-France Vignéras ne considère que les centres rationnels, quadratiques, ou cubiques *cycliques*.]

Question. *Est-il possible plus généralement de classer les algèbres de quaternions totalement définies pour les quelles il y a exactement une classe par type (= classe de conjugaison) d'ordre maximal ?*

A correction to Hallouin-Maire's Crelle paper (8 jan. 2015).

Dans son Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, soutenu en novembre 2013, Emmanuel Hallouin revient aux pages 15–21 sur le problème de la simplification pour signaler une erreur dans l'article à *Crelle* co-écrit avec Christian Maire. La liste corrigée des ordres à simplification se trouve aux pages 20 et 21 du mémoire.

L'erreur a été repérée en 2013 par Daniel SMERTNIG, qui a écrit à ce sujet l'article

A note on cancellation in totally definite quaternion algebras,
J. Reine Angew. Math. **207** (2015), 209-216 ;
page *WEB* : *www.uni-graz.at/daniel.smertnig/*.

<u>1er avril 2019</u>. Des résultats plus généraux sur la simplification ont été obtenus par D. Smertnig et J. Voight (arXiv NT, March 26th, 2019).