LES RÉSEAUX FORTEMENT EUTACTIQUES

par Jacques MARTINET et Boris VENKOV
(avec un appendice de Renaud COULANGEON)

RÉSUMÉ. Nous décrivons quelques constructions de réseaux fortement eutactiques, c'est-à-dire dont le système de vecteurs minimaux est un 2-design sphérique, et dressons des tables, exhaustives jusqu'à la dimension 5, de ceux qui sont connus en petite dimensions.

ABSTRACT. English title : *Strongly eutactic lattices.*
We describe some constructions of strongly eutactic lattices (Euclidean lattices whose system of minimal vectors constitute a spherical 2-design), and we construct tables, which exhaust all possibilities up to dimension 5.

INTRODUCTION.

À la suite de l'article [Ven] consacré à l'étude des réseaux fortement parfaits (ceux dont l'ensemble S des vecteurs minimaux est un 4-design sphérique), il nous a paru utile de donner quelques résultats concernant les réseaux pour lesquels S est un 2-design sphérique, réseaux que nous appelons *fortement eutactiques*. Cette condition est beaucoup plus faible que la précédente. De ce fait, nous n'avons pas de résultats de classification au-delà de la dimension 5. Dans ce cas, la liste complète, obtenue grâce à la classification faite par Batut de tous les réseaux eutactiques, est donnée dans la table 8.1. La table 8.2 contient une liste de 19 réseaux fortement eutactiques de dimension 6 ; nous ignorons si cette liste est complète (probablement, elle ne l'est pas).

Laboratoire A2X, U.M.R 5465 C.N.R.S. — Université Bordeaux 1

Mots-clés : *Réseaux, 2- et 3-designs sphériques, eutaxie*

On trouve dans chacune des dimensions 5 et 6 un réseau (noté respectivement B_5 et $\mathbb{E}_6-\mathbb{E}_6^*$) dont l'existence ne résulte pas des constructions usuelles. Les §§5 et 6 donnent à ces réseaux une “raison d'être” : B_5 apparaît comme le *réseau des relations* pour $\mathbb{A}_2\bigotimes\mathbb{A}_2$; la construction générale correspondante, du type “dualité”, est décrite au §5; le réseau noté $\mathbb{E}_6-\mathbb{E}_6^*$, trouvé sur une arête du graphe de Voronoï joignant $\mathbb{E}_6$ à $\mathbb{E}_6^*$ (d'où la notation), apparaît comme une section du réseau fortement parfait ${K'_{10}}^*$, et correspond à une construction générale décrite au §6.

Nous avons ajouté un §7 consacré à une contruction, dite du *carré harmonique*, permettant d'associer un 2-design (non symétrique) de dimension $\frac{n(n+1)}{2}-1$ à tout 4-design de dimension n. L'article s'achève par un §8 de nature numérique, et est complété par un appendice de Coulangeon, dans lequel le réseau des relations de $\mathbb{A}_n$ est interprété comme un carré extérieur.

1. Les configurations fortement eutactiques

On note E un espace euclidien de dimension n. La notation S désigne une configuration de s droites de E. Étant donné un réseau Λ de E, on note $S(\Lambda)$ ou S l'ensemble de ses vecteurs minimaux, ainsi que la configuration de $s=s(\Lambda)$ droites qui les portent. La notation p_F désigne la projection orthogonale sur un sous-espace F de E ; c'est un élément de l'ensemble $\mathrm{End}^s(E)$ des endomorphismes symétriques de E. On note p_x la projection orthogonale sur la droite portant le vecteur x non nul, qui se calcule par la formule

$$p_x(y)=\frac{x\,.\,y}{x\,.\,x}\,x\,. \tag{1.1}$$

Rappelons qu'une configuration S est dite *faiblement eutactique* s'il existe une relation

$$\mathrm{Id}_E=\sum_{D\in S}\rho_D\,p_D \tag{1.2}$$

à coefficients ρ_D réels, appelés *coefficients d'eutaxie.*

Comme $\mathrm{Tr(Id)}=n$ et $\mathrm{Tr}(p_D)=1$, on a la relation

$$\sum_{D\in S}\rho_D=n\,. \tag{1.3}$$

On dit que S est *semi-eutactique* si l'on a $\rho_D\ge 0$, *eutactique* si l'on a $\rho_D>0$ et *fortement eutactique* ([Ven], définition 6.1) si les coefficients

ρ_D sont égaux; dans ces conditions, S est eutactique, vu que, par 1.3, on a $\rho_D = \frac{n}{s}$. Autrement dit,

(1.4)
$$S \text{ fortement eutactique } \iff \sum_{D\in S} p_D \text{ est proportionnel à l'identité}.$$

En outre, le coefficient de proportionalité est égal à $\dfrac{s}{n}$.

En utilisant 1.1 (le calcul est fait explicitement dans [M], ch. III, prop. 2.5), on montre que la condition d'eutaxie faible se traduit, une fois choisis $m > 0$ et un vecteur x de norme m sur chaque droite, par l'identité

$$(1.5) \qquad (x\,.\,x)(\alpha\,.\,\alpha) = \sum_{x\in S} \rho_x (x\,.\,\alpha)^2\,,$$

dans laquelle $\alpha \in E$ est arbitraire.

Ces définitions s'appliquent aux réseaux en prenant pour S l'ensemble des directions de leurs vecteurs minimaux. En choisissant les ρ_x constants et égaux à $\frac{s}{n}$ dans 1.5, on retrouve l'identité établie dans [Ven] qui caractérise le fait que S soit un 2-design sphérique (ou un 3-design, c'est la même chose vu la symétrie de S) :

$$(1.6) \qquad \forall \alpha \in E\,, \quad (x\,.\,x)(\alpha\,.\,\alpha) = \frac{n}{s} \sum_{x\in S(\Lambda)/\{\pm 1\}} (x\,.\,\alpha)^2\,.$$

Le nombre $\frac{2s}{n}$ qui intervient dans le calcul de la somme $\sum_{x\in S}(x\,.\,\alpha)^2$ par la formule ci-dessus est un analogue pour les réseaux fortement eutactiques généraux du *nombre de Coxeter* des réseaux de racines irréductibles (mais il peut ne pas être entier).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de Λ, de matrice de Gram $A = (e_i\,.\,e_j) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$. Associons à tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ la matrice-colonne X des composantes dans $\mathcal{B}$ de x. Alors, la matrice dans les bases $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}$ de la projection p_x est la matrice $\frac{1}{x\,.\,x} X\,{}^tX$. Par conséquent, la relation 1.2 peut se mettre sous la forme

$$(1.7) \qquad \min \Lambda A^{-1} = \sum_{x\in S/\{\pm 1\}} \rho_x X\,{}^tX\,.$$

De cette expression de la condition d'eutaxie résulte tout de suite :

Proposition 1.8. *Un réseau possédant des coefficients d'eutaxie rationnels est rationnel, c'est-à-dire proportionnel à un réseau entier. En particulier, un réseau fortement eutactique est rationnel.* □

De la condition d'eutaxie faible, nous retiendrons en outre les deux propriétés suivantes :

- Pour toute configuration S faiblement eutactique, les droites de S ne sont pas contenues dans un hyperplan de E, et l'inégalité $s \geq n$ qui en résulte est une égalité si et seulement si les droites de S sont deux à deux orthogonales, S étant dans ce cas fortement eutactique.
- Le nombre de classes de similitude de réseaux faiblement eutactiques de dimension donnée est fini.

La première propriété se démontre facilement sur la définition (appliquer 1.2 à un vecteur orthogonal à un hyperplan qui contiendrait S) ; la seconde (Bergé-Martinet) utilise la décomposition de l'espace des réseaux en *classes minimales*, cf. [M], ch. IX.

2. Constructions de configurations fortement eutactiques

Les propriétés que nous allons énoncer figurent essentiellement dans [M], ch. III, sauf que la notion d'eutaxie forte n'y est pas explicitement définie. Nous n'énoncerons le plus souvent que ce qui concerne l'eutaxie forte et nous contenterons de démonstrations succinctes.

On considère une configuration S de droites de E. Par définition, son *groupe d'automorphismes*, noté $\mathrm{Aut}(S)$, est le sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$ qui stabilise S. Pour un réseau Λ de E, $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(S)$.

Proposition 2.1. *Une réunion disjointe de configurations fortement eutactiques est fortement eutactique.*

Démonstration. En effet, si $S_1, \dots, S_r$ sont fortement eutactiques, chacune des sommes $\sum_{D \in S_i} p_D$ est proportionnelle à l'identité. Il en est donc de même de $\sum_{D \in \cup S_i} p_D$. □

Proposition 2.2. *Si S est faiblement eutactique, et si* $\mathrm{Aut}(S)$ *opère transitivement sur S, alors S est fortement eutactique.*

Démonstration. En effet, pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ et toute droite D de S, on a $p_{\sigma D} = s \circ p_D \circ s^{-1}$ et l'on obtient tout de suite une relation de forte eutaxie en faisant la moyenne sur $\mathrm{Aut}(S)$ des deux membres d'une relation de faible eutaxie. $\square$

THÉORÈME 2.3. *Si la représentation définie par* $\mathrm{Aut}(S)$ *est* $\mathbb{R}$*-irréductible,* S *est fortement eutactique.*

Démonstration. C'est le théorème 6.6 de [M], ch. III ("théorème de Brauer-Coxeter"), à cela près que l'expression "fortement eutactique" n'est pas utilisée dans [M]. $\square$

REMARQUE 2.4. Pour appliquer les énoncés 2.2 et 2.3 à un réseau Λ, il n'est pas indispensable de connaître $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ tout entier : un sous-groupe possédant la bonne propriété de transitivité ou d'irréductibilité suffit.

Soit maintenant $E = \perp_{i=1}^r E_i$ une décomposition de E en somme orthogonale de sous-espaces et, pour tout i, soit S_i une configuration de droites de E_i. Notons S la réunion dans E des S_i.

PROPOSITION 2.5. *Pour que* S *soit fortement eutactique, il faut et il suffit que les* S_i *soient fortement eutactiques et que le rapport* $\dfrac{s(S_i)}{\dim(E_i)}$ *soit indépendant de* i.

Démonstration. Supposons d'abord que S soit fortement eutactique. On a alors par 1.4

$$\sum_{D \in S} p_D = \frac{s}{n}\,\mathrm{Id}\,;$$

en composant les deux membres de cette relation avec les projections orthogonales sur chacun des E_i, on obtient pour les S_i des relations d'eutaxie dont les coefficients sont égaux à $\frac{s}{n}$.

La réciproque est une conséquence immédiate de l'égalité $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^r p_{E_i}$. $\square$

Les énoncés 2.2 à 2.5 s'appliquent tout de suite aux réseaux. Comme les diverses conditions d'eutaxie ne dépendent que de l'ensemble des vecteurs minimaux du réseau, on a :

Proposition 2.6. *Si Λ est un réseau fortement eutactique, tout réseau Λ' contenant Λ et ayant même ensemble de vecteurs minimaux que Λ est encore fortement eutactique.* $\square$

Sous l'hypothèse moins restrictive $S(\Lambda') \supset S(\Lambda)$, l'eutaxie faible se conserve, ainsi évidemment que la perfection, mais aussi la conjonction de l'eutaxie et de la perfection, cf. [M], th. 6.2. En revanche, il n'y a pas de raison qu'il en soit de même de l'eutaxie seule ou de la forte eutaxie (même jointe à la perfection), non plus que de la forte perfection (qui se conserve bien sûr sous les hypothèses de la prop. 2.6; un exemple est connu en dimension 23).

L'exemple suivant illustre un cas d'application du théorème 2.3, alors que la proposition 2.2 ne s'applique pas:

Exemple 2.7. Les réseaux $J_{12} \sim \Lambda_{12}^{\max}, J_{16}, J_{20}, \dots$ définis dans [M], chapitre VIII, § 2, possèdent deux orbites de vecteurs minimaux qui sont toutes deux des configurations fortement eutactiques (l'une est somme orthogonale de $\frac{n}{4}$ configurations minimales de type $\mathbb{D}_4$).

La proposition suivante, concernant des configurations de droites, ne s'applique pas directement aux réseaux.

Étant donnés deux espaces euclidiens E_1, E_2 et des configurations de droites $S_1 \subset E_1$ et $S_2 \subset E_2$, on sait définir les produits tensoriels $E = E_1 \bigotimes E_2$ et $S = S_1 \bigotimes S_2 \subset E$. (Le produit scalaire sur E est caractérisé par $(x_1 \otimes x_2) \,.\, (y_1 \otimes y_2) = (x_1 \,.\, y_1)\,(x_2 \,.\, y_2)$; pour $D_i \in S_i$, le sous-espace $D_1 \otimes D_2$ de E est la droite D qui porte le vecteur $x = x_1 \otimes x_2$ quels que soient $x_i \in D_i$ non nuls.)

Proposition 2.8. *Le produit tensoriel de deux configurations fortement eutactiques est une configuration fortement eutactique.*

Démonstration. L'injection canononique

$$\mathrm{End}^s(E_1) \bigotimes \mathrm{End}^s(E_2) \hookrightarrow \mathrm{End}^s(E_1 \bigotimes E_2)$$

caractérisée par $(u_1 \otimes u_2)(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$ identifie le produit tensoriel $\mathrm{End}^s(E_1) \bigotimes \mathrm{End}^s(E_2)$ à un sous-espace de $\mathrm{End}^s(E_1 \bigotimes E_2)$, et, dans cette identification, $p_{D_1} \otimes p_{D_2}$ correspond à $p_{D_1 \otimes D_2}$. Des relations d'eutaxie

$$\mathrm{Id}_{E_1} = \sum_{D \in S_1} \rho_D p_D \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{E_2} = \sum_{D \in S_2} \rho'_D p_D \,,$$

on déduit alors la relation $\mathrm{Id}_E = \sum_{D_1 \in S_1, D_2 \in S_2} \rho_{D_1} \rho'_{D_2} \, p_{D_1 \otimes D_2}$. □

Pour appliquer la proposition 2.8 à deux réseaux Λ_1 et Λ_2, il faut savoir quand l'égalité $S(\Lambda_1 \bigotimes \Lambda_2) = S(\Lambda_1) \bigotimes S(\Lambda_2)$ est vérifiée. Un certain nombre de conditions suffisantes ont été données par Kitaoka dans [Ki], chapitre 7.

On peut également définir les puissances extérieures de configurations : pour $0 \leq k \leq n$, $\bigwedge^k E$ est un espace vectoriel de dimension $\binom{n}{k}$ et, pour tout réseau L de E, $\bigwedge^k L$ est un réseau de $\bigwedge^k E$. On renvoie à [Cou1] pour leurs principales propriétés ; rappelons simplement que le produit scalaire dans $\bigwedge^k E$ est défini sur les multi-vecteurs par

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \,.\, y_1 \wedge \cdots \wedge y_k = \det_{1 \leq i,j \leq k} (x_i \,.\, x_j) \,.$$

Étant données k droites $D_1, \ldots, D_k$ de E, la droite portant le multi-vecteur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ ne dépend pas du choix de $x_i \in D_i$ non nul, et ce multi-vecteur est non nul si les k droites D_i ne sont pas dans un même sous-espace de dimension $k-1$.

Le même problème que pour le produit tensoriel apparaît : l'égalité $S(\bigwedge^k L) = \bigwedge^k S(L)$ peut ne pas être vérifiée. Un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi ont été données par Coulangeon dans [Cou2]. En outre, il n'y a aucune raison pour qu'une condition d'eutaxie vérifiée par un réseau le soit par ses puissances extérieures. Un contre-exemple facile est le suivant : le réseau $L = \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2$ est fortement eutactique, avec $n = 4$ et $s = 6$; son carré extérieur est de dimension 6, mais il contient seulement 2 couples de vecteurs minimaux, associés aux deux réseaux hexagonaux de norme 2 contenus dans L.

3. Éléments de classification

On montre qu'il est possible de trouver une partie finie de l'ensemble des cellules qui interviennent dans la décomposition cellulaire de l'espace des formes quadratiques réelles définies positives de minimum m donné de façon que toute cellule soit équivalente (modulo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$) à une cellule de cette partie finie. On montre en outre qu'une cellule contient (à isométrie près) au plus un réseau faiblement eutactique de minimum m, d'où l'assertion de finitude énoncé au § 1, cf. [M], chapitre IX.

La classification des réseaux faiblement eutactiques est connue dans les dimensions $n \leq 5$. Les résultats pour $n \leq 4$ (Štogrin, Bergé-Martinet) sont reproduits dans [M], chapitre IX, § 3. La classification en dimension 5 a été obtenue récemment par Batut ([Bt]). La classification des réseaux fortement eutactiques s'en déduit jusqu'à la dimension 5. Le tableau suivant indique les nombres de réseaux eutactiques ou fortement eutactiques connus, de dimension $n \leq 7$:

Tableau 3.1.

n	1	2	3	4	5	6	7
eut.	1	2	5	16	118		
fort. eut.	1	2	3	6	8	≥ 19	≥ 10

Les principaux invariants de ces réseaux figurent dans les tableaux 8.1 et 8.2 ci-dessous.

Au-delà de la dimension 5, on ne possède que des résultats très partiels. Nous indiquons maintenant quelques éléments de classification en dimensions $n = 6$ et $n = 7$.

Les réseaux de système de vecteurs minimaux $S(\mathbb{Z}^n)$ s'obtiennent en adjoignant au réseau $\mathbb{Z}^n$ des vecteurs de la forme $\frac{1}{a}(a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0)$ (à permutation près des coordonnées), avec $m \leq n$ et des a_i non nuls et premiers avec a dans leur ensemble. Des arguments d'indice (cf. [Mar1]) montrent que pour $n \leq 7$, on doit prendre $a = 2$. Comme on peut alors prendre $a_i = 1$ pour tout i, on doit avoir $m \geq 5$, et comme les codes binaires de poids $\omega \geq 5$ n'existent qu'à partir de la dimension 8, on ne trouve que les possibilités suivantes (rappelons que $\mathbb{D}_n^*$ est le réseau cubique centré) :

$n = 6 :$ $\mathbb{Z}^6$, $\mathbb{Z} \perp \mathbb{D}_5^*$, $\mathbb{D}_6^*$;

$n = 7 :$ $\mathbb{Z}^7$, $\mathbb{Z}^2 \perp \mathbb{D}_5^*$, $\mathbb{Z} \perp \mathbb{D}_6^*$, $\mathbb{D}_7^*$.

Des arguments analogues montrent que l'on ne peut pas adjoindre à un réseau de racines de dimension $n \leq 7$ un vecteur supplémentaire sans modifier son système de racine. On en déduit la classification des réseaux fortement eutactiques réductibles :

PROPOSITION 3.2. *Un réseau fortement eutactique réductible de dimension $n=6$ (resp. $n=7$) est semblable à $\mathbb{Z}^6$, $\mathbb{Z}\perp\mathbb{D}_5^*$, $\mathbb{A}_2\perp\mathbb{A}_2\perp\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3^*\perp\mathbb{A}_3^*$ ou $\mathbb{A}_3\perp\mathbb{A}_3$ (resp. à $\mathbb{Z}^7$, $\mathbb{Z}\perp\mathbb{D}_6^*$ ou $\mathbb{Z}^2\perp\mathbb{D}_5^*$).* □

Démonstration. Un tel réseau Λ est de la forme $\Lambda_1\perp\Lambda_2$ avec Λ_1 irréductible de dimension $n_1\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, soit $n_1\leq 3$, et la proposition 2.5 montre que l'on doit avoir $\dfrac{s(\Lambda_2)}{n_2}=\dfrac{s(\Lambda_1)}{n_1}$.

Si $n_1=1$, on a $\Lambda_1\sim\mathbb{Z}$, donc $s(\Lambda_2)=n_2$, d'où $S(\Lambda_2)=S(\mathbb{Z}^{n_2})$, donc aussi $S(\Lambda)=S(\mathbb{Z}^n)$, cas étudié auparavant.

Si $n_1=2$ (resp. $n_1=3$), on a $\Lambda_1\sim\mathbb{A}_2$ (resp. $\Lambda_1\sim\mathbb{A}_3$ ou $\Lambda_1\sim\mathbb{A}_3^*$) d'après ce que l'on sait des dimensions 2 et 3, donc $\dfrac{s(\Lambda_2)}{n_2}=\dfrac{3}{2}$ (resp. $\dfrac{s(\Lambda_2)}{n_2}=2$ ou $\dfrac{s(\Lambda_2)}{n_2}=\dfrac{4}{3}$), et l'examen de la liste des réseaux fortement eutactiques de dimension $n_2\leq 5$ ne laisse que le choix $\Lambda_2\sim\mathbb{A}_2\perp\mathbb{A}_2$ (resp. $\Lambda_2\sim\mathbb{A}_3$ ou $\Lambda_2\sim\mathbb{A}_3^*$). □

REMARQUE 3.3. Il n'est pas difficile de classer les réseaux fortement eutactiques de dimension 6 et de minimum 2, et d'étendre ensuite à la dimension 8 les résultats obtenus ci-dessus pour les dimensions 6 et 7. On trouve 6 réseaux de vecteurs minimaux $S(\mathbb{Z}^8)$ (dont l'un est associé à un code de poids 5) et 2 réseaux de système de racines $4\boldsymbol{A}_2$, puis 9 réseaux réductibles: $\mathbb{Z}^8$, $\mathbb{Z}^m\perp\mathbb{D}_{8-m}^*$ $(m=1,2,3)$, $\mathbb{A}_2^{4\perp}$, et les 4 réseaux $\Lambda\perp\Lambda$ avec $\Lambda\sim\mathbb{A}_4^*$, $\mathbb{A}_2\bigotimes\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{D}_4$.

4. Réseaux fortement eutactiques de dimension au plus 7

Une première source de réseaux fortement eutactiques est le théorème 2.3. Si un sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est $\mathbb{R}$-irréductible, alors on peut appliquer le théorème à Λ^* ainsi qu'aux réseaux pairs éventuellement associés à des renormalisations entières de Λ et Λ^*.

La représentation du groupe de Weyl des réseaux de racines irréductibles $\mathbb{A}_n$ $(n\geq 1)$, $\mathbb{D}_n$ $(n\geq 4)$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ est $\mathbb{R}$-irréductible. Ces réseaux sont donc fortement eutactiques, ainsi que $\mathbb{A}_n^*$, $n\geq 3$, $\mathbb{D}_n^*$, $n\geq 5$ et $\mathbb{D}_n^+$, $n\geq 10$ pair (qui relèvent aussi de la proposition 2.6), $\mathbb{E}_6^*$, $\mathbb{E}_7^*$, , ...

Pour tout r entier divisant $n+1$, le *réseau de Coxeter* $\mathbb{A}_n^r$ (l'unique sous-réseau de $\mathbb{A}_n^*$ contenant $\mathbb{A}_n$ avec l'indice r) est stable par le groupe d'automorphismes de $\mathbb{A}_n$, et est donc aussi fortement eutactique. (Le réseau pair associé à $\sqrt{n+1}\,\mathbb{A}_n^*$ lorsque n est impair est semblable à $\mathbb{A}_n^{(n+1)/2}$.)

L'égalité $S(\Lambda_1 \bigotimes \Lambda_2) = S(\Lambda_1) \bigotimes S(\Lambda_2)$ est vraie chaque fois que l'un des deux réseaux Λ_1, Λ_2 est entier de norme au plus 6 ([Ki], th. 7.1.2.). Dans ces conditions, si Λ_1 et Λ_2 sont fortement eutactiques, il en est de même de $\Lambda_1 \bigotimes \Lambda_2$.

Appliqué avec $\Lambda_1 = \mathbb{Z}^n$, vu l'isomorphisme $\mathbb{Z}^m \bigotimes \Lambda \simeq \Lambda^{m\perp}$, ce résultat redonne un cas particulier de la proposition 2.5; appliqué avec $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{A}_2$, il met en évidence le réseau fortement eutactique irréductible $\mathbb{A}_2 \bigotimes \mathbb{A}_2$ (de norme 4, de déterminant 81, avec $s = 9$).

Les familles de réseaux ci-dessus permettent de décrire tous les réseaux fortement eutactiques jusqu'à la dimension 4. Dans le cas de la dimension 5, un unique réseau échappe à une telle description: c'est le réseau noté B_5 dans le tableau 8.1, trouvé par Batut, que l'on peut définir par la matrice de Gram

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Une construction *a priori* de ce réseau, conduisant en outre à une démonstration de la propriété de forte eutaxie, est décrite au § 5.

Pour décrire les réseaux fortement eutactiques de dimension 6, il faut considérer d'autres constructions.

Pour $n = p-1$, p premier, on définit les réseaux $\mathbb{A}_n^{(r)}$ de Craig à l'aide de la forme $\frac{1}{p}\,\mathrm{Tr}(x\overline{y})$ sur une puissance de l'idéal premier au-dessus de p du p-ième corps cyclotomique. Ces réseaux sont fortement eutactiques, leur groupe d'automorphismes étant $\mathbb{R}$-irréductible (cf. [Mar], chapitre V, prop. 4.6). En complétant par $\mathbb{A}_6^{(2)}$ la liste $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_6^*$, $\mathbb{D}_6$ et $\mathbb{A}_6$, on obtient tous les réseaux fortement eutactiques et parfaits de dimension 6 (5 réseaux sur 7 réseaux parfaits).

La construction suivante utilise des propriétés du groupe symétrique S_r. On montre que les puissances extérieures des représentations naturelles des groupes de Weyl des systèmes de racines sont (absolument) irréductibles. (Ce résultat, dû à Steinberg, est démontré sous une forme plus générale dans [Bou], Lie V, exercice 3, p. 127; nous remercions J.-P. Serre de nous avoir signalé cette référence.)

Vu l'isomorphisme $W(\mathbb{A}_n) \simeq S_{n+1}$, les réseaux $\bigwedge^2 \mathbb{A}_n$ sont fortement eutactiques. Ils sont de norme 3; le réseau pair associé, de même que son

dual et que son réseau pair associé, sont aussi fortement eutactiques.
[D'après [Cou2], prop. 2.4, les vecteurs minimaux des carrés extérieurs des réseaux de racines irréductibles sont les bivecteurs décomposés $x \wedge y$ tels que $\langle x, y\rangle$ soit un plan hexagonal de norme 2. Nous ignorons ce qu'il en est des puissances extérieures suivantes.]

On construit ainsi 3 réseaux fortement eutactiques de dimension 6 à partir de $\mathbb{A}_4$. (Le dual ne joue aucun rôle pour $n = 4$: pour tout réseau Λ de dimension $n = 2r$ pair, le réseau $\bigwedge^r \Lambda$ est en effet isodual.)

En partant de $\mathbb{D}_4$, on retrouve des réseaux connus par ailleurs; en particulier, $\bigwedge^2 \mathbb{D}_4$ est semblable à $\mathbb{D}_6^+$.
[Signalons la curieuse coïncidence suivante : le réseau 4-modulaire Q_{10} de Souvignier est isométrique au sous-réseau pair de $\bigwedge^2 \mathbb{D}_5$.]

Un réseau de dimension 6 parmi ceux qui figurent dans le tableau 8.2 échappe aux constructions précédentes : c'est le réseau noté $\mathbb{E}_6 - \mathbb{E}_6^*$, unique réseau eutactique sur le chemin de contiguïté du graphe de Voronoï joignant des copies de $\mathbb{E}_6$ et de $\mathbb{E}_6^*$. Une construction *a priori* de ce réseau, conduisant en outre à une démonstration de la propriété de forte eutaxie, est décrite au § 6.

Ce réseau possède un analogue en dimension 7, noté $\mathbb{E}_7 - \mathbb{E}_7^*$, dont nous ne savons pas expliquer l'existence. Voici des matrices de Gram pour chacun de ces deux réseaux :

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 14 & -5 & -5 & -5 & -5 & 5 & 5 \\ -5 & 14 & -4 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ -5 & -4 & 14 & 5 & -4 & -5 & -5 \\ -5 & 5 & 5 & 14 & 5 & -5 & -5 \\ -5 & 5 & -4 & 5 & 14 & -5 & -5 \\ 5 & 4 & -5 & -5 & -5 & 14 & 5 \\ 5 & 4 & -5 & -5 & -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Les données contenues dans la thèse de Jaquet ([Ja]) permettent de trouver tous les réseaux eutactiques de rang de perfection $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ pour $n \leq 7$. Cette étude a été faite par Batut ([Bt']); aucun autre réseau fortement eutactique n'est apparu. En revanche, toujours en dimension 7, une réseau fortement eutactique a été trouvé par Batut et Sigrist sur le chemin joignant $\mathbb{D}_7$ à $\mathbb{E}_7^*$ de l'algorithme de Voronoï équivariant pour la représentation régulière du groupe cyclique d'ordre 7. (Principaux invariants : $\min = 5$, $\det = 3^6.5$, $s = 21$, $s^* = 7$; il possède des sections de codimension 2 isométriques au réseau B_5 signalé plus haut.)

Les 10 réseaux fortement eutactiques de dimension 7 signalés dans le tableau 3.1 sont les 4 réseaux de vecteurs minimaux $S(\mathbb{Z}^n)$, les 4 réseaux parfaits (parmi 33) E_7, E_7^*, $\mathbb{D}_7$ et $\mathbb{A}_7$, le réseau avec $s = 21$ mentionné ci-dessus et le réseau $\mathbb{E}_7 - \mathbb{E}_7^*$. Les principaux invariants de ce réseau sont $s = s^* = 27$ et Smith $= 54.9^5$ (voir la définition au § 8).

Les donnés du tableau 3.1 suggèrent que le nombre de réseaux fortement eutactiques est petit par rapport au nombre total de réseaux faiblement eutactiques, et qu'il devrait en conséquence être possible de les classer. Toutefois, l'existence du réseau $\mathbb{E}_7 - \mathbb{E}_7^*$, qui ne peut être écrit comme réseau entier qu'avec un minimum multiple de 14, indique qu'une telle classification est probablement très difficile en dimension 7.

5. Le réseau des relations : de la dimension n à la dimension $s - n$

Nous décrivons dans ce paragraphe une construction qui permet en particulier de construire le curieux réseau noté B_5 dans la table 8.1 à partir d'un réseau fortement eutactique de dimension 4, le seul en dimension 5 qui ne fasse pas partie de séries "classiques".

On considère une partie finie symétrique X à $2s$ éléments d'un espace euclidien E de dimension n, engendrant un réseau Λ de E. On suppose que X est un 2-design sphérique (ou 3-design, c'est la même chose). La propriété de design se traduit par les deux conditions :

(1) $\exists\, c > 0,\ \forall x \in X,\ x \,.\, x = c$;

(2) $\forall \alpha \in E,\ \sum_{x \in X'} (x \,.\, \alpha)^2 = \dfrac{s}{n} (\alpha \,.\, \alpha)\,(x \,.\, x)$, X' désignant un système de représentants dans X de $X/\{\pm 1\}$.

On associe alors à X l'ensemble $\mathcal{R}(X, \Lambda)$ défini ainsi : on munit d'abord $\mathbb{Z}^s$ d'une base orthonormale e_x indexée par X' ; on considère ensuite l'application $\varphi : \mathbb{Z}^s \to \Lambda$ définie par $e_x \mapsto x$; on définit enfin Γ par la suite exacte

$$0 \to \Gamma = \ker \varphi \to \mathbb{Z}^s \xrightarrow{\varphi} \Lambda \to 0 \ :$$

c'est le *réseau des relations*, noté $\mathcal{R}(X, \Lambda)$.

On va maintenant associer au couple (Λ, X) et au couple d'entiers (n, s) qui lui correspond un nouveau couple $(D\Lambda, DX)$ auquel sera associé le couple d'entiers $(s - n, s)$. Pour cela, on pose d'abord

$$D\Lambda = \langle \mathcal{R}(X, \Lambda)^* \rangle ,$$

réseau engendré par $\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}\Gamma \mid \forall\, y \in \Gamma,\ x \,.\, y \in \mathbb{Z}\}$.

Pour construire DX, on commence par renormaliser Λ de façon que l'on ait $(x\,.\,x = \frac{n}{s}$ sur X. La condition (2) devient

$$\forall\,\alpha \in E,\ \sum_{x \in X'} (x\,.\,\alpha)^2 = (\alpha\,.\,\alpha) \implies$$

$$\forall\,\alpha,\,\beta \in E,\ \sum_{x \in X'} (x\,.\,\alpha)\,(x\,.\,\beta) = (\alpha\,.\,\beta) \implies \forall\,\alpha \in E,\ \sum_{x \in X'} (x\,.\,\alpha)\,x = \alpha\,.$$

Prenons maintenant $\alpha = x_0 \in X'$. La formule précédente s'écrit $\sum_x (x\,.\,x_0)\,x = x_0$. On pose alors $\beta_{x_0} = e_{x_0} - \sum_{x \in X'} (x\,.\,x_0)\,e_x$ (c'est un élément de Γ), et finalement

$$DX = \{\beta_{x_0} \mid x_0 \in X\}\,.$$

Lemme 5.1. *On a* $\beta_{x_0} \in \mathcal{R}(\Lambda, X)^*$.

Démonstration. Soit $r = \sum_x n_x\,e_x \in \mathcal{R}(\Lambda, X)$; les coefficients n_x sont des entiers tels que $\sum_x n_x\,x = 0$. On a

$$\beta_{x_0} = \big(1 - (x_0\,.\,x_0)\big)\,e_{x_0} - \sum_{x \neq x_0} (x\,.\,x_0)\,x\,,$$

et donc

$$(\beta_{x_0}\,.\,r) = n_{x_0}\,\big(1 - (x_0\,.\,x_0)\big) - \sum_{x \neq x_0} (x_0\,.\,x)\,n_x$$

$$= n_{x_0} - \sum_{x \in X'} (x\,.\,x_0)\,n_x = n_{x_0} - \Big(\sum_{x \in X'} n_x\,x\,.\,x_0\Big) = n_{x_0}\,. \qquad \square$$

Le calcul précédent, en tenant compte de la condition $(x\,.\,x) = \frac{n}{s}$, entraîne

$$(*)\quad \beta_{x_0}\,.\,\beta_{x_0} = 1 - (x_0\,.\,x_0) = \frac{s-n}{s} \quad \text{et} \quad \beta_{x_1}\,.\,\beta_{x_2} = -x_1\,.\,x_2 \text{ si } x_1 \neq x_2\,.$$

Plongeons $\mathbb{Z}^s$ dans $F = \mathbb{R} \bigotimes \mathbb{Z}^s \simeq \mathbb{R}^s$, et considérons l'application

$$w : \lambda \mapsto \sum_{x \in X'} (\lambda\,.\,x)\,e_x$$

de E dans F. Notons V son image. On a $\varphi \circ w(\lambda) = \sum_x (\lambda\,.\,x)\,x = \lambda$, i.e. $\varphi \circ w = \mathrm{Id}_E$.

LEMME 5.2. *w est une isométrie.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in E$, on a

$$w(\lambda)\,.\,w(\lambda) = \sum_{x,y \in X'} (\lambda\,.\,x)\,(\lambda\,.\,y)\,(e_x\,.\,e_y) = \sum_{x \in X'} (\lambda\,.\,x)^2 = (\lambda\,.\,\lambda)$$

la dernière égalité provenant de ce que X est un 2-design de norme $\frac{s}{n}$. $\square$

LEMME 5.3. *$V \cap \mathbb{Z}^s$ est isométrique à Λ^*.*

Démonstration. En effet, un élément $\mu \in V$ est de la forme $w(\lambda)$, $\lambda \in E$. On a alors $\mu = \sum_{x \in X'} (\lambda\,.\,x)\,e_x$, et

$$\mu \in \mathbb{Z}^s \Longleftrightarrow \forall x \in X', (\lambda\,.\,x) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda^* \Longleftrightarrow \mu \in w(\Lambda^*)\,. \qquad \square$$

PROPOSITION 5.4. *On a* $\det(\mathcal{R}(\Lambda, X)) = \det(\Lambda)$.

Démonstration. On a $\mathcal{R}(\Lambda, X)^* = V^\perp \cap \mathbb{Z}^s$. Comme $\mathbb{Z}^s$ est unimodulaire, on a l'égalité $\det(V^\perp \cap \mathbb{Z}^s) = \det(V \cap \mathbb{Z}^s)$ (valable pour tout sous-espace V de $\mathbb{R}^s$). On conclut en utilisant l'égalité bien connue $\det(L^*) = \dfrac{1}{\det(L)}$ qui s'applique à tout réseau L. $\square$

Il est commode d'interpréter matriciellement les calculs de produits scalaires qui nous ont conduits aux formules $(*)$. Soit G la matrice de Gram de X', et soit $G' = I_s - G$. Le fait que X soit un 2-design se traduit par l'égalité $G^2 = G$. Les relations $(*)$ signifient que G' est la matrice de Gram $(\beta_{x_i}\,.\,\beta_{x_j})$. On a

$${G'}^2 = (I_s - G)\,(I_s - G) = I_s - 2\,G + G^2 = G'\,,$$

ce qui entraîne :

THÉORÈME 5.5. *L'ensemble DX est un 2-design.* $\square$

Considérons le cas d'un réseau Λ fortement eutactique. On peut lui appliquer la dualité précédente avec $X = S(\Lambda)$. Si DX est effectivement l'ensemble des vecteurs minimaux de $D\Lambda$, alors $D\Lambda$ sera aussi fortement eutactique.

Notons que cette condition n'est pas toujours vérifiée. Considérons le cas où $S(\Lambda)$ contient des systèmes $\boldsymbol{A}_2$ (systèmes engendrant un réseau hexagonal). Les termes diagonaux de G (resp. de G') sont $\frac{n}{s}$ (resp.

$1-\frac{n}{s}=\frac{s-n}{n}$), et l'on trouve dans G et dans G' des termes non diagonaux égaux à $\pm\frac{1}{2}\,\frac{n}{s}$. Une condition nécessaire pour que DX soit égal à $S(D\Lambda)$ est que l'on ait $1-\frac{n}{s}\geq 2\,\frac{1}{2}\,\frac{n}{s}$, i.e. $s\geq 2n$.

Proposition 5.6. *Le réseau des relations associé au réseau* $\Lambda=\mathbb{A}_2\bigotimes\mathbb{A}_2$ *est le réseau* B_5.

Démonstration. On a $s(\Lambda)=9$. Le réseau des relations $D\Lambda$ est donc un réseau de dimension 5 avec $s=9$. On vérifie que son minimum est $\frac{s-n}{n}=\frac{5}{9}$, donc égal à 5 dans la normalisation qui le rend entier et primitif. Le réseau obtenu est alors fortement eutactique et ne peut en conséquence qu'être le réseau B_5 de la table 8.1. $\square$

Il serait intéressant de déterminer les réseaux des relations attachés à certains réseaux célèbres. Le cas des réseaux $\mathbb{A}_n$ est traité dans l'appendice de Coulangeon.

6. Réseaux fortement eutactiques construits à partir de réseaux fortement parfaits

Le but de ce paragraphe est de construire des sections fortement eutactiques de réseaux fortement parfaits. On obtient en particulier une construction à partir de ${K'_{10}}^*$ du réseau noté $\mathbb{E}_6-\mathbb{E}_6^*$ dans le tableau 8.2.

On considère un réseau fortement parfait Λ (cela signifie que $S(\Lambda)$ est un 5-design sphérique, cf. [Ven], §6), normalisé par la condition $\min\Lambda^*=2$. Désignons par $\mathcal{R}$ l'un des systèmes de racines $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{E}_6$ ou $\boldsymbol{E}_7$. et faisons les deux hypothèses suivantes :

(1) $S(\Lambda^*)$ contient $\mathcal{R}$;

(2) $\forall\lambda\in S(\Lambda)$, $\forall\lambda^*\in\mathcal{R}$, $\lambda\,.\,\lambda^*\in\{0,\pm1\}$.

On notera que la condition (2) est vérifiée lorsque l'invariant de Bergé-Martinet est de carré $\gamma'(\Lambda)^2=\dfrac{n+2}{3}$, autrement dit lorsque le réseau est de type minimal au sens de [Ven], définition 10.6. Dans ce cas, Λ est de minimum $\frac{n+2}{6}$.

Théorème 6.1. *Soit* V *le sous-espace de* E *engendré par* $\mathcal{R}$ *et soit* W *son orthogonal dans* E. *Alors,* $\Lambda\cap W$ *est un réseau fortement eutactique.*

Démonstration. Soient $p_1 : E \to V$ et $p_2 : E \to W$ les projections orthogonales respectives sur V et sur W. Pour tout $x \in S(\Lambda)$ et tout $r \in \mathcal{R}$, on a $x \,.\, r = 0$ ou ± 1 par l'hypothèse (2), et donc $p_1(x) \,.\, r = x \,.\, r \in \{0, \pm 1\}$. Autrement dit, quel que soit $x \in X$, $p_1(x)$ est un *micropoids* pour le système de racines $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une forme linéaire prenant sur $\mathcal{R}$ seulement les valeurs $0, \pm 1$. Mais, dans le cas des systèmes $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{E}_6$ et $\boldsymbol{E}_7$, les micropoids non nuls ont la même norme, égale respectivement à $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$, une propriété qui peut se vérifier par un calcul sans difficulté.

Par hypothèse, X est un 4-design sphérique, ce qui signifie que l'on a pour tout $\alpha \in E$

$$\sum_{x \in X} (x \,.\, \alpha)^4 = \frac{3(x \,.\, x)^2}{n(n+2)} \, |X| \, (\alpha \,.\, \alpha)^2 \,.$$

Si $\alpha \in W$, on a $x \,.\, \alpha = p_2(x) \,.\, \alpha$ et donc

$$\sum_{x \in X} (p_2(x) \,.\, \alpha)^4 = \frac{3(x \,.\, x)^2}{n(n+2)} \, |X| \, (\alpha \,.\, \alpha)^2 \,.$$

Appliquons maintenant à cette identité l'opérateur Δ de Laplace relatif au sous-espace W. On obtient ([Ven], §1)

$(*)$

$$4.3 \sum_{x \in X} \big(p_2(x) \,.\, p_2(x)\big) \, (p_2(x) \,.\, \alpha)^2 = \frac{3(x \,.\, x)^2}{n(n+1)} \, |X| \, 2 \, (\dim W + 2) \, \alpha \,.\, \alpha \,.$$

Posons $X_0 = X \cap W$ et $X_1 = X \smallsetminus X_0$, et notons m la norme de Λ et $\varepsilon_{\mathcal{R}}$ la norme commune aux micropoids de $\mathcal{R}$. Pour $x \in X_0$, on a $p_2(x) = x$ et donc $p_2(x).p_2(x) = x \,.\, x = m$; pour $x \in X_1$, on a $p_2(x) \,.\, p_2(x) = m - p_1(x) \,.\, p_1(x) = m - \varepsilon_{\mathcal{R}}$. La formule $(*)$ peut se réécrire sous la forme

$$(**) \qquad \sum_{x \in X_0} (x \,.\, \alpha)^2 + c_1 \sum_{x \in X_1} (p_2(x) \,.\, \alpha)^2 = c_2 \, (\alpha \,.\, \alpha)$$

où $c_1 = 1 - \frac{\varepsilon_{\mathcal{R}}}{m}$ et $c_2 = \frac{m}{2n(n+2)} \, |X| \, (\dim W + 2)$.

Comme X est aussi un 2-design, on a également l'identité

$$(***) \qquad \sum_{x \in X_0} (x \,.\, \alpha)^2 + \sum_{x \in X_1} (x \,.\, \alpha)^2 = \frac{x \,.\, x}{n} \, |X| \, (\alpha \,.\, \alpha) \,.$$

Mais on a $x \,.\, \alpha = p_2(x) \,.\, \alpha$ puisque $\alpha \in W$. Comme la constante c_1 n'est pas égale à 1, le système des deux équations $(**)$ et $(***)$ détermine uniquement les deux sommes sur X_0 et sur X_1 qui interviennent. Ces deux sommes sont donc proportionnelles au produit scalaire $\alpha\,.\,\alpha$, ce qui prouve en particulier que X_0 est un 2-design sphérique, et donc que $\Lambda\cap W$ est un réseau fortement eutactique, puisque X_0 est évidemment l'ensemble de ses vecteurs minimaux. $\square$

Remarque 6.2.. L'ensemble X_1 est aussi un 2-design sphérique si toutes les fibres $p_2^{-1}(x)$ ont même cardinal, et donc en particulier si la restriction de p_2 à X est injective. C'est ce qui se passe dans l'exemple suivant, où X_1 est semblable à $S(\mathbb{E}_6^*)$.

Exemple 6.3. Soit Λ le réseau obtenu en renormalisant ${K'_{10}}^*$ au minimum 6 ; c'est un réseau entier et primitif. Le réseau K'_{10} est de norme 4, et contient une section L de minimum 4 semblable à $\mathbb{D}_4$. Les réseaux K'_{10} et ${K'_{10}}^*$ sont fortement parfaits de type minimal ([Ven], § 13). Donc, $L^\perp$ est un réseau de dimension 6 qui est fortement eutactique. C'est le réseau noté $\mathbb{E}_6 - \mathbb{E}_6^*$ dans le tableau 8.2.

Remarque 6.4.. Le groupe d'automorphismes de K'_{10} opère transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux, mais répartit les sections minimales de type $\mathbb{A}_2$ en deux orbites. On définit ainsi trois sections L_9, L_{8a} et L_{8b} de ${K'_{10}}^*$, qui sont fortement eutactiques par le théorème 6.1. On constate que les réseaux L_9 et L_{8a} sont parfaits (non fortement) mais que L_{8b} ne l'est pas, ce qui prouve en particulier que ces deux réseaux ne sont pas isométriques. On trouve également 2 orbites de sections minimales de type $\mathbb{A}_3$ dans K'_{10}, définissant deux sections de dimension 7 de ${K'_{10}}^*$, dont aucune n'est fortement eutactique, et enfin une section de type $\mathbb{D}_4$, dont l'orthogonal est le réseau de l'exemple 6.3.

Signalons que le réseau non parfait L_{8b} est 12-modulaire au sens défini au début du § 8.

7. Carré harmonique d'un design sphérique

Exceptionnellement, les 2-designs construits dans ce paragraphe ne sont pas *a priori* symétriques. Soit X un 4-design sphérique contenu dans un espace euclidien E de dimension n. (Si X est l'ensemble $S(\Lambda)$ des vecteurs minimaux d'un réseau Λ, cela signifie que Λ est fortement parfait.) Nous nous proposons de construire un 2-design sphérique dans un sous-espace de dimension $N = \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ du carré symétrique $\mathrm{Sym}^2 E$ de E, lui-même de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2} = N+1$. Toutefois, contrairement au cas des autres constructions de cet article, nous n'obtiendrons pas un design symétrique. Dans ces conditions, pour obtenir une caractérisation des 2-design, il faut compléter la relation 1.5 par une identité assurant que l'on a un 1-design, ce qui se traduit simplement par le fait que le centre de gravité de X est le centre de la sphère, cf. [Ven], th. 3.2, (4).

Nous définissons le *carré symétrique de* E comme le sous-espace de $E \bigotimes E$ engendré par les tenseurs $x \otimes x$, $x \in E$. Cet espace s'identifie à l'espace $\mathrm{End}^s(E)$ des endomorphismes symétriques de E en associant à $x \otimes x$ l'endomorphisme $y \mapsto (x \,.\, y)\, x$, et donc aussi au sous-espace engendré par les formes $y \mapsto (x \,.\, y)^2$ de l'espace des formes quadratiques sur E.

DÉFINITION 7.1. Pour $x \in X$, soit $h_x(y) = (x \,.\, y)^2 - \dfrac{1}{n}(x \,.\, x)\,(y \,.\, y)$. Le *carré harmonique* $\mathrm{Harm}_2(X)$ *de* X est

$$\mathrm{Harm}_2(X) = \{h_x \mid x \in X\}\,.$$

C'est un sous-ensemble de l'espace $\mathrm{Harm}_2(E)$ des polynômes harmoniques de degré 2 sur E. On le munit ([Ven], § 2) du produit scalaire

$$[f, g] = \frac{1}{2!}\, f(\nabla)\, g\,.$$

Ce produit scalaire vérifie les deux propriétés suivantes, qui le caracérisent :

(1) Pour $g_x(y) = (x \,.\, y)^2$, $[f, g_x] = f(x)$.

(2) Pour $g_0(y) = y \,.\, y$, $[f, g_0] = \frac{1}{2}\Delta f$.

THÉORÈME 7.2. *Si X est un 4-design sphérique, le carré harmonique de X est un 2-design sphérique.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathrm{Harm}_2(X)$ est un 1-design. Pour cela, vu que les h_α, $\alpha \in E$ engendrent Harm_2, il suffit de vérifier que l'on a $\sum_{x \in X} [h_x, h_\alpha] = 0$. Or, on a

$$[h_x, h_\alpha] = h_x(\alpha) = (x \,.\, \alpha)^2 - \frac{1}{n}(\alpha \,.\, \alpha)\,(x \,.\, x)\,, \tag{7.3}$$

d'où

$$\sum_{x\in X}[h_x,h_\alpha]=\sum_{x\in X}(x\,.\,\alpha)^2-\frac{|X|}{n}\,(x\,.\,x)\,(\alpha\,.\,\alpha)\,, \tag{7.4}$$

expression qui est nulle par 1.5 car X, étant un 4-design, est *a fortiori* un 2-design.

Pour prouver que $\mathrm{Harm}_2(X)$ est un 2-design, il suffit maintenant de vérifier l'analogue de 1.5 pour la dimension $N=\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$, à savoir l'identité

$$\sum_{x\in X}[h_x,h_\alpha]^2=\frac{|X|}{N}\,[h_x,h_x]\,[h_\alpha,h_\alpha]\,. \tag{7.5}$$

Du fait que X est un 4-design, on a l'identité ([Ven], formule 3.6)

$$\sum_{x\in X}(x\,.\,\alpha)^4=\frac{1.3\,|X|}{n(n+2)}\,(x\,.\,x)^2\,(\alpha\,.\,\alpha)^2\,. \tag{7.6}$$

En remplaçant dans le premier membre de 7.5 $[h_x,h_\alpha]^2$ par sa valeur tirée de 7.3, on obtient

$$\sum_{x\in X}(x\,.\,\alpha)^4-\frac{2}{n^2}\,(x\,.\,\alpha)^2(\alpha\,.\,\alpha)\,(x\,.\,x)+\frac{1}{n^2}\,(\alpha\,.\,\alpha)^2(x\,.\,x)^2$$

ce qui, compte tenu de 7.6, est égal à

$$\frac{3\,|X|}{n(n+2)}\,(\alpha\,.\,\alpha)^2\,(x\,.\,x)^2-\frac{2}{n}\,\frac{|X|}{n}\,(\alpha\,.\,\alpha)^2(x\,.\,x)^2+\frac{1}{n^2}\,|X|\,(\alpha\,.\,\alpha)^2(x\,.\,x)^2\,,$$

expression qui se simplifie en

$$|X|\,(\alpha\,.\,\alpha)^2(x\,.\,x)^2\left[\frac{3}{n(n+2)}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right]=|X|\,(\alpha\,.\,\alpha)^2(x\,.\,x)^2\,\frac{2(n-1)}{n^2(n+2)}\,.$$

De la formule 7.3, on tire $[h_x,h_x]=\dfrac{n-1}{n}\,(x\,.\,x)^2$ et $[h_\alpha,h_\alpha]=\dfrac{n-1}{n}\,(\alpha\,.\,\alpha)^2$, et l'on obtient pour le second membre de 7.5 la valeur

$$\frac{|X|}{(n+2)(n-1)/2}\,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\,(x\,.\,x)^2(\alpha\,.\,\alpha)^2$$

qui est bien celle du premier membre. $\square$

8. Données numériques

Dans les tableaux des deux pages suivantes, nous donnons la liste des réseaux fortement eutactiques connus en dimensions 1 à 5, puis 6, avec la dimension n (dans le premier tableau seulement), le rang de perfection r, le "demi-kissing number" s, la norme m d'un modèle entier et primitif, l'*invariant de Smith* du réseau, le nom du réseau et un commentaire éventuel. La notation L_p désigne le réseau pair associé à un réseau impair L. L'expression *L est ℓ-modulaire* est employée dans le sens faible suivant : il existe une similitude de rapport $\sqrt{\ell}$ (ℓ entier positif) qui applique L^* sur L ; en particulier, la condition d'être pair n'est pas requise ici.

Étant donné un réseau entier Λ, donc contenu dans son dual, on désigne par $\mathrm{Smith}(\Lambda)$ la suite des diviseurs élémentaires du couple (Λ^*, Λ).

Dans la colonne "remarques", "mod." signifie "modulaire", "f.p." signifie "fortement parfait", et "réduc." signifie "réductible".

BIBLIOGRAPHIE

[Bt] Batut, C. Classification of quintic eutactic forms. *Math. Comp.*, to appear.

[Bt'] Batut, C. *Communication privée.*

[Bou] Bourbaki, N. *Groupes et algèbres de Lie.* Masson (Paris), 1981.

[Cou1] Coulangeon, R. Réseaux k-extrêmes. *Proc. London Math. Soc. 73* (1996), 555–574.

[Cou1] Coulangeon, R. Minimal Vectors in the Second Exterior Power of a Lattice. *J. Algebra 194* (1997), 467–476.

[Ki] Kitaoka, Y. *Arithmetic of quadratic forms.* Cambridge University Press, Tract nu. 106 (Cambridge, U.K.), 1993.

[Mar] Martinet, J. Les réseaux parfaits des espaces euclidiens. Masson (Paris), 1996.

[Mar1] Martinet, J. Sur l'indice d'un sous-réseau. *Ce volume.*

[Ven] Venkov, B. B. Réseaux et “designs” sphériques. Notes par J. Martinet. *Ce volume*.

Jacques Martinet
A2X, Institut de Mathématiques
Université Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
France
e-mail : martinet@math.u-bordeaux.fr

Boris Venkov
Fontanka 27, POMI
191011 St.Petersbourg
Russie
e-mail : bvenkov@pdmi.ras.ru

Tableau 8.1. Réseaux fortement eutactiques de dimension 1 à 5

n	r	s	m	Smith	réseau	remarque
1	1	1	1	1	$\mathbb{Z}$	$1-$ mod., f. p.
2	2	2	1	1	$\mathbb{Z}^2$	réduc.
2	3	3	2	3	$\mathbb{A}_2$	$3-$ mod., f. p.
3	3	3	1	1	$\mathbb{Z}^3$	réduc.
3	4	4	3	4^2	$\mathbb{A}_3^*$	
3	6	6	2	4	$\mathbb{A}_3$	extrême
4	4	4	1	1	$\mathbb{Z}^4$	réduc.
4	5	5	4	5^3	$\mathbb{A}_4^*$	
4	6	6	2	3^2	$\mathbb{A}_2^{2\perp}$	réduc.
4	9	9	4	9.3^2	$L_4^2 \simeq \mathbb{A}_2 \bigotimes \mathbb{A}_2$	$9-$ mod.
4	10	10	2	5	$\mathbb{A}_4$	extrême
4	10	12	2	2^2	$\mathbb{D}_4$	$2-$ mod., f. p.
5	5	5	1	1	$\mathbb{Z}^5$	réduc.
5	5	5	4	4^4	$\mathbb{D}_5^*$	
5	6	6	5	$2^4.3^4$	$\mathbb{A}_5^*$	
5	9	9	5	$9^2.3^2$	B_5	
5	10	10	3	6.2^3	$\mathbb{A}_5^2$	$\mathbb{A}_5^{3\,*}$
5	15	15	2	6	$\mathbb{A}_5$	extrême
5	15	15	4	6.3^3	$\mathbb{A}_5^3$	extrême
5	15	20	2	4	$\mathbb{D}_5$	extrême

Tableau 8.2. Réseaux fortement eutactiques de dimension 6.

r	s	m	Smith	réseau	remarque
6	6	1	1	$\mathbb{Z}^6$	réduc.
6	6	4	4^4	$\mathbb{Z} \perp \mathbb{D}_5^*$	réduc.
6	6	2	2^4	$\mathbb{D}_6^*$	
7	7	6	7^5	$\mathbb{A}_6^*$	
8	8	3	4^4	$\mathbb{A}_3^{*\,2\perp}$	réduc.
9	9	2	3^3	$\mathbb{A}_2^{\perp 3}$	réduc.
10	10	3	5^3	$\overset{2}{\wedge}\mathbb{A}_4$	$5-$ mod.
12	12	4	4^2	$\mathbb{A}_3^{2\perp}$	réduc.
12	12	5	$10^2.5$	$((\overset{2}{\wedge}\mathbb{A}_4)_p)^*$	
12	12	6	$12^3.4$	$\mathbb{A}_2 \bigotimes \mathbb{A}_3^*$	
15	15	4	$10^2.5$	$(\overset{2}{\wedge}\mathbb{A}_4)_p$	
16	16	4	4.2^4	$\mathbb{D}_6^+ \simeq \overset{2}{\wedge}\mathbb{D}_4$	$4-$ mod.
18	18	4	$12^2.3$	$\mathbb{A}_2 \bigotimes \mathbb{A}_3$	
20	24	6	$24.8.4^2$	$\mathbb{E}_6 - \mathbb{E}_6^*$	
21	21	2	7	$\mathbb{A}_6$	extrême
21	21	4	7^3	$\mathbb{A}_6^{(2)}$	$7-$ mod., extrême
21	27	4	3^5	$\mathbb{E}_6^*$	fort. parf.
21	30	2	2^2	$\mathbb{D}_6$	extrême
21	36	2	3	$\mathbb{E}_6$	fort. parf.

APPENDICE : SUR LE RÉSEAU DES RELATIONS DE $\mathbb{A}_n$

par Renaud Coulangeon
(Laboratoire A2X, Université Bordeaux 1)

On identifie dans ce qui suit le réseau $\mathbb{A}_n$ avec l'intersection de $\mathbb{Z}^{n+1}$ et de l'hyperplan $H_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, les vecteurs $v_i = \varepsilon_i - \varepsilon_0$, $1 \le i \le n$ constituent une base de $\mathbb{A}_n$. On désigne par la lettre X un "demi"-système de vecteurs minimaux de $\mathbb{A}_n$, à savoir

$$X = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ 0 \le i < j \le n\}.$$

Le *réseau des relations* R_n de $\mathbb{A}_n$ est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}_n \to \mathbb{Z}^X \to \mathbb{A}_n \to 0\,,$$

où $\mathbb{Z}^X$ désigne le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{e_x,\ x \in X\}$. La structure euclidienne de R_n est obtenue *via* l'identification $\mathbb{R}^X \simeq \mathbb{R}^{|X|}$, i.e., on munit $\mathbb{R}^X = \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^X$ du produit scalaire pour lequel les e_x, $x \in X$, constituent une base orthonormée.

Lemme. *Le réseau* R_n *admet pour base les vecteurs* $u_{i,j}$, $1 \le i < j \le n$, *où* $u_{i,j} = -e_{\varepsilon_0 - \varepsilon_i} + e_{\varepsilon_0 - \varepsilon_j} - e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$.

Démonstration. C'est immédiat, en utilisant la description

$$\mathrm{R}_n = \Big\{ \sum_{x \in X} n_x e_x \mid \sum n_x x = 0 \Big\}. \qquad \square$$

PROPOSITION. *Pour tout entier* $n \geq 1$, *le réseau* R_n *est isométrique au carré extérieur* $\bigwedge^2 \mathbb{A}_n$.

Démonstration. On munit $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^2 \mathbb{A}_n$ du produit scalaire canonique induit par celui de $\mathbb{R}^n$, i.e. $x \wedge y \,.\, z \wedge t = \det \begin{pmatrix} x \cdot z & x \cdot t \\ y \cdot z & y \cdot t \end{pmatrix}$.

On considère alors l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{R}_n &\longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{A}_n \\ u_{i,j} &\mapsto v_i \wedge v_j \,. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire prouve que $u_{i,j} \,.\, u_{k,l} = v_i \wedge v_j \,.\, v_k \wedge v_l$ pour tous les couples $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$, d'où la conclusion. $\square$