

INTRODUCTION

Ce recueil d'article est en quelque sorte un *Festschrift* dédié à BORIS VENKOV, membre de l'Institut Steklov de Saint-Pétersbourg, avec qui tous les auteurs qui ont proposé un texte ont eu l'occasion de collaborer à un moment ou à un autre de leur vie scientifique.

Malheureusement, pendant l'édition de ce recueil, nous avons eu la douleur d'apprendre le décès de Louis Michel, professeur à l'I.H.E.S. Une notice nécrologique, écrite par ses deux co-auteurs Peter Engel et Marjorie Senechal, lui rend hommage dans ce volume.

*
* *

Le point de départ de la confection de ce volume est un cours que Boris Venkov a donné à Bordeaux entre octobre 1996 et mars 1997, alors qu'il bénéficiait d'une invitation de six mois sur un poste offert par le C.N.R.S. Ayant noté que de nombreuses recherches avaient lieu à Bordeaux autour de la théorie des *réseaux extrêmes* (réseaux euclidiens réalisant un maximum local de densité de l'empilement canonique de sphères qui leur est associé), il a décidé de nous exposer des résultats liés à cette théorie. Venant d'un mathématicien russe, ce choix n'est pas complètement inattendu. Il convient en effet de rappeler que la théorie des réseaux extrêmes a été initiée à Saint-Pétersbourg en 1873 par A. Korkine et G. Zolotareff, et poursuivie au début du vingtième siècle par G. Voronoï, qui avait auparavant étudié à Saint-Pétersbourg. Plus près de nous, on notera diverses contributions de l'École Russe de Moscou.

J'ai de mon côté décidé de rédiger ce cours. J'y ai éprouvé quelques difficultés, provenant de l'ignorance presque totale des questions combinatoires qui était la mienne à cette époque. Je suis maintenant très satisfait de pouvoir présenter ici une contribution reliant la vieille théorie de Korkine–Zolotareff à des directions de recherches d'une grande actualité comme la

théorie des formes modulaires et la combinatoire des designs sphériques, sans compter les interventions de la théorie des invariants, plongeant elle aussi ses racines dans le 19-ième siècle tout en retrouvant une nouvelle jeunesse.

Cette théorie de Venkov établissant des liens entre réseaux et designs sphériques est l'objet du premier article de ce recueil. On y montre en particulier que les réseaux dont l'ensemble des vecteurs minimaux constitue un 4-design sphérique sont extrêmes. Outre qu'elle permet de prouver l'extrémalité de certains réseaux dans des dimensions dépassant les possibilités des ordinateurs, cette théorie suggère de nombreux problèmes de classification. Résoudre certains d'entre eux a été l'un des buts de l'article. Dans cette direction, beaucoup de choses sont encore à faire.

*
* *

Les trois articles qui suivent (auteurs : C. Bachoc–B. Venkov, J. Martinet–B. Venkov et J. Martinet) sont directement liés à l'article précédent. Le premier est consacré à l'étude des designs sphériques qui sont fournis par les couches successives des réseaux modulaires au sens de Quebbemann; il contient aussi d'importants résultats de classification. Dans les deux autres, on s'occupe respectivement de 2-designs et de designs de niveau supérieur à 4, alors que c'est l'étude des 4-designs qui constitue le cœur de l'article de Boris Venkov.

*
* *

L'article de Coulangeon se rattache à la théorie de Korkine–Zolotareff–Voronoi des réseaux extrêmes (théorie “locale”). L'auteur considère le *problème de Humbert*, qui est l'étude d'une “constante d'Hermite” associée à un corps de nombres, et qui se réduit à la constante usuelle dans le cas du corps des nombres rationnels. Il établit une caractérisation du type Voronoi des réseaux Humbert-extrêmes (ce sont les réseaux qui sont *parfaits* et *eutactiques* pour une généralisation convenable de ces notions) et prouve des résultats de finitude ouvrant la voie à des questions de classification.

Mon article sur les indices de sous-réseaux prend sa source dans des travaux de Watson, prolongés à Moscou par Ryškov, puis par Zahareva. On y trouve une classification complète jusqu'à la dimension 8, corrigeant certaines erreurs et insuffisances de l'article de Mme Zahareva, et replaçant les problèmes dans un cadre plus général. En particulier, les études

précédentes sont complétées par la détermination des rangs de perfection des familles de réseaux qui interviennent.

*
* *

Les deux derniers articles, s'ils sont encore tous consacrés à la théorie des réseaux euclidiens, sont moins directement reliés à la théorie locale, bien que les questions de perfections n'en soient pas très éloignées.

L'article de R. Bacher et B. Venkov est consacré à une question de classification des réseaux unimodulaires (réseaux entiers de déterminant 1). Les travaux de Borchers, Conway, Niemeier et Sloane, faisant suite à des travaux plus anciens de Martin Kneser, ont abouti à la classification de ces réseaux jusqu'à la dimension 25. Ce dernier cas, traité par Borchers dans sa thèse, atteint les limites du raisonnable, le nombre de systèmes de racines possibles et le nombre de réseaux associés à un système donné atteignant des tailles importantes. Les auteurs se sont limités aux réseaux sans racine (i.e., de minimum 3, vu les majorations connues de ce minimum), indiscutablement les plus intéressants. On savait qu'il existe trois réseaux de ce type jusqu'à la dimension 26. Les auteurs montrent qu'il en existe exactement 3 en dimension 27 et 38 en dimension 28, en développant des méthodes ne faisant pas appel à l'algorithme de voisinage de Kneser.

L'article de P. Engel, L. Michel et M. Senechal se rattache à la théorie des *cellules de Voronoï*, dont la dimension n est celle de l'espace du réseau, alors que la théorie locale correspond aux *domaines de Voronoï*, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$; en quelque sorte, il s'agit de cristallographie en dimension supérieure. Ce court "survey", renvoyant à un livre en préparation du troisième auteur, permet d'avoir en peu de pages une idée de problèmes le plus souvent étudiés par des cristallographes.

*
* *

Je remercie les membres de l'équipe de géométrie des nombres de l'Université Bordeaux 1 (C. Bachoc, C. Batut, A.-M. Bergé, R. Coulangeon) pour l'aide qu'ils m'ont apportée tant dans le travail d'édition que dans la rédaction des articles que j'ai écrits à cette occasion.

Je remercie également Henri Cohen et ses collaborateurs qui ont permis, grâce au système *PARI*, de nombreuses vérifications numériques; dans ce

domaine, je tiens à citer également Christian Batut, dont les programmes ont été utilisés par plusieurs auteurs.

Enfin, je remercie les responsables de la revue “L’Enseignement Mathématiques” de m’avoir permis de publier ce recueil, qui sera l’un des premiers numéros de la nouvelle série des “Monographies”. J’exprime plus particulièrement ma reconnaissance à Daniel Coray pour le travail qu’ils a accompli lors de l’édition de ce numéro, et à Thierry Vust, qui a effectué une relecture soignée des manuscrits, tant du point de vue de la rédaction que de celui du contenu scientifique.

Talence, le 5 décembre 2000
Jacques Martinet, éditeur