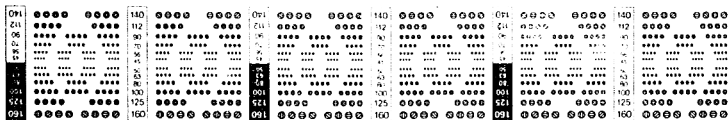


© A.N.R.T. UNIVERSITÉ DE GRENOBLE II, Domaine
Universitaire B.P. 47 X - 38040 Grenoble Cédex.



MIRE ISO N° 1
NF Z 43-007

AFNOR

Cedex 7 - 92080 PARIS-LA-DÉFENSE

FORMULAIRE D'ENREGISTREMENT DE THESE SOUTENUE

A FOURNIR OBLIGATOIREMENT POUR TOUTE SOUTENANCE DE THESE EN 3
EXEMPLAIRES, QUE CETTE THESE SOIT OU NON REPRODUITE

N° D'ENREGISTREMENT

N° CARTE D'ETUDIANT

**A REMPLIR PAR LE CANDIDAT, A L'ENCRE NOIRE, EN MAJUSCULES D'IMPRIMERIE, UN CARACTERE PAR CASE
NE RIEN INSCRIRE DANS LES CASES GRISEES**

NOM DE L'ETABLISSEMENT OU DE L'UNIVERSITE
..... UNIVERSITE BORDEAUX I

TYPE DE DOCTORAT

Nouveau régime	Etat	3 ^e cycle
Ingenieur	Autres	

CODE TITRE

M.	Mme	Mlle
2	2	3

NATIONALITE

Française	CEE	Autres
2	2	3

NOM (sous lequel a été soutenue la thèse)

NOM de jeune fille
(pour les femmes mariées, si différent de ci-dessus)

PRENOM

DIRECTEUR THESE (nom, prénom)

DATE DE SOUTENANCE

BERGE Anne Marie

[TB] Code de l'établissement ou de l'université (cf notice) → 0 3 3 1 7 6 4 N
 11 18
 [19]
 [20]
 BARIL
 21
 45
 55
 67
 72
 73
 75
 84
 66
 Année 86 Mois 01
 72 78

TC Consulter l'annexe 3 de la brochure

DOMAINE 1
(lettres = 1; sciences = 2; santé = 3)

CODE DISCIPLINE : 001.A02

LIBELLE DISCIPLINE
MATHEMATIQUES

Figure 1 is a timeline diagram showing the sequence of events from 11 D to 35. The timeline is divided into segments by vertical tick marks. The segments are labeled as follows:

- 11 D
- 13 I
- 15 5.5
- 17 5.5
- 19 5.5
- 21 5.5
- 23 C
- 26 O
- 31 P
- 33 CSU
- 35
- SF

ADRESSE PERMANENTE DU CANDIDAT

TD	N° ET NOM DE RUE
	COMMUNE
	CODE POSTAL
	DATE DE NAISSANCE

A REMPLIR PAR LE CANDIDAT
ET MAJUSCULES
 Aucun symbole spécial (autre que le tiret)

TITRE DE LA THESE EN FRANCAIS





TE	Autour de l'algorithme de Voronoï : construction de réseaux euclidiens.
TF	
TG	
TH	

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Nombre de pages : 67

Nombre de volumes : 1

Nombre de références bibliographiques : 22

Présence de matériel d'accompagnement : ☒  ☒  ☒  ☒ 

**S'IL Y A LIEU :
IDENTIFIANT DE LA THESE
ATTRIBUE PAR L'ETABLISSEMENT**

TX	00
1 2	11

NUMERO D'IDENTIFICATION

9-6105-D-7-1-CO-516

A REMPLIR PAR LE CANDIDAT - DACTYLOGRAPHIER OBLIGATOIREMENT EN UTILISANT MINUSCULES ET MAJUSCULES, ET EXCLUSIVEMENT DES CARACTERES LATINS .
Aucun symbole spécial (alphabet grec, chiffres romains, symboles mathématiques...) n'est admis.

TITRE DE LA THESE EN ANGLAIS

01 | _____ About Voronoï algorithm : building of euclidian lattices _____

02 | _____

03 | _____

04 | _____

11

13

132

RESUME DE LA THESE EN FRANCAIS

05 | Dans l'étude de la densité des empilements réguliers de =
 06 | sphères se dégage la notion de réseaux extrêmes, pour lesquels =
 07 | Voronoï a donné un algorithme d'énumération, inabordable =
 08 | dans la pratique au-delà de la dimension 7. Dans les pre- =
 09 | miers chapitres de cette thèse, nous élaborons de nouveaux =
 10 | algorithmes sélectionnant les réseaux extrêmes (laminés, en =
 11 | patchwork,...), et qui, implantés sur ordinateur, fournissent =
 12 | de nombreux réseaux nouveaux en dimensions moyennes. Au =
 13 | dernier chapitre, où l'on privilégie les questions de dualité, les =
 14 | algorithmes précédents sont plutôt utilisés à l'exploration de =
 15 | l'espace des réseaux. On y découvre par exemple un réseau qui =
 16 | réalise, en moyenne avec son dual, la densité record pour la di- =
 17 | mension 9. On construit également en dimension 9 un chemin =
 18 | de réseaux isoduaux sur lequel il existe un réseau qui réalise =
 19 | actuellement le record de densité parmi les isoduaux.

19 | _____

20 | _____

21 | _____

22 | _____

23 | _____

24 | _____

RESUME DE LA THESE EN ANGLAIS
(facultatif dans les disciplines de santé)

35	<p>In study of the density of regular sphere packing raises the notion of extremal lattices, for which Voronoï gave an enumeration algorithm unattainable in practice for dimension over 7. In the first chapters of this thesis, we create new algorithm selecting the extremal lattices (laminated, in patchwork, ...), and that, once settled on the computer, provide numerous new lattices in averages dimension. In the last chapter, where question of duality are considered, we previous algorithms are rather used to explore the space of lattices. We discover for exemple a lattice which achieve, in average with its dual, the record density for the dimension 9. As well, we build a path of isodual lattices on wich there exist a lattice achieving the record of density among the isodual.</p>
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	

11

13

132

Un exemplaire du guide "le signalement et la valorisation de la thèse" sera remis avec les 3 formulaires à chaque candidat.

Les Informations demandées sur ce formulaire sont destinées :

1 - à l'exception de l'adresse et de la date de naissance, à la constitution de la banque de données TELETHESES.

La déclaration est obligatoire en application de l'arrêté du 25 septembre 1985 relatif au dépôt, signalement et reproduction des thèses ou travaux présentés en soutenance en vue du doctorat.

Le droit d'accès et de rectification prévu par la loi n° 78 - 17 du 6 janvier 1978 relative à l'informatique, aux fichiers et aux libertés, peut s'exercer auprès de :

Agence Bibliographique de l'Enseignement Supérieur - TELETHESES - le Florence - 25, rue Guillaume Dupuytren - 34196 MONTPELLIER CEDEX 5

- Tél : 67 54 84 10

Le fichier TELETHESES a fait l'objet d'une déclaration à la CNIL (arrêté du 10 septembre 1991 : article IV publié au Journal officiel du 1 octobre 1991).

2 - à l'exception de l'adresse de l'étudiant, des titres, résumés et mots clés de la thèse à la constitution de la banque de données DOCT à finalité statistique.

Le droit d'accès et de rectification prévu par la loi n° 78 - 17 du 6 janvier 1978 relative à l'informatique, aux fichiers et aux libertés, peut s'exercer auprès du service de la scolarité de l'établissement d'enseignement supérieur habilité à délivrer le doctorat dans lequel l'étudiant est inscrit.

Le fichier DOCT a fait l'objet d'une déclaration à la CNIL (arrêté du 13 septembre 1991 publié au B.O.E.N., n° 39 du 7 novembre 1991).

MOTS-CLÉS OU VEDETTES-MATIERE EN FRANÇAIS (1 mot-clé par case)

Réseaux
 Perfection
 Extrémalité
 Algorithme de Voronoï

Réseau symplectique
 Réseau en patchwork
 Lamination.
 Isodualité

63 13 52

64 13 52

65 13 52

66 13 52

67 13 52

68 13 52

69 13 52

70 13 52

INFORMATIONS SUR LA SCOLARITE : DEA

Code 01.02.1.1 Intitulé MATHEMATIQUES PURES
DIPLOME DE LA THEORIE DES NOMBRES

RATTACHEMENT DU LABORATOIRE D'ACCUEIL DU DOCTORANT

Etablissement d'enseignement supérieur

Non ☐ 0 Université ☒ 1 Ecole d'ingénieur ☐ 2 Autre ☐ 3

Organisme public de recherche

Non ☐ 0 CNRS ☒ 1 INSERM ☐ 2 INRA ☒ 3 Autre ☐ 4

Organisme privé

Non ☐ 0 Oui ☒ 1

Autorisation, par le jury, de
reproduction de la thèse

1 OUI

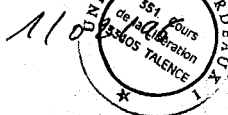
2 NON

3 NON (corrections non effectuées)

DATE ET SIGNATURE DU CANDIDAT

31 janvier 1996

DATE ET CACHET DU SERVICE DE DOCTORAT

DATE ET CACHET DE LA BIBLIOTHEQUE
DE L'ETABLISSEMENT

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR Jean-Luc BARIL

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

AUTOUR DE L'ALGORITHME DE VORONOI :
CONSTRUCTION DE RESEAUX EUCLIDIENS

Soutenue le 25 janvier 1996

Après avis de Mme Vallée et M. Sigrist

Rapporteurs

Devant la commission d'examen composée de :

M	F. SIGRIST	Professeur (Univ. de Neuchâtel)	Président
M	J. MARTINET	Professeur (Univ. Bordeaux I)	Rapporteur
M	Ch. BATUT	Maître de Conférences (Univ. Bordeaux I)	Examineurs
Mme	A.-M. BERGÉ	Professeur (Univ. Bordeaux I)	
M	A. JOUX	Ingénieur Armement (Rennes)	
Mme	G. NEBE	Maître de Conférences (Univ. d'Aix-La-Chapelle)	
Mme	B. VALLÉE	Professeur (Univ. de Caen)	

- 1996 -

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à mon directeur de thèse Anne-Marie BERGÉ. Sa disponibilité, son aide, ses encouragements, son souci de rigueur et d'efficacité ont été déterminants pour l'aboutissement de ce travail. Tout au long de notre collaboration, j'ai pu apprécier ces grandes qualités humaines et scientifiques.

Je remercie également Jacques MARTINET. Il a su, lors de "conversations de couloir", me faire bénéficier d'une infime partie de sa culture mathématique. Une très grande part de ma reconnaissance lui revient.

Je voudrais aussi remercier l'ensemble des membres du laboratoire d'algorithmique, les auteurs du système de calculs PARI, Ch. BATUT, D. BERNARDI, H. COHEN et M. OLIVIER, et en particulier Ch. BATUT dont nous avons aussi utilisé certains programmes non intégrés au système PARI. Je n'oublie pas les deux ingénieurs Ch. LABESSE et P. CRUBILLÉ, qui, grâce à leurs compétences, m'ont initié aux joies du clavier.

Brigitte VALLÉE et François SIGRIST ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, et me font l'honneur de figurer dans le jury. Je tiens à leur exprimer toute ma gratitude pour avoir répondu favorablement à notre sollicitation.

Je remercie également G. NEBE qui m'a apporté plusieurs commentaires très profitables concernant mes travaux. Sa présence dans le jury, ainsi que celle de A. JOUX sont pour moi un grand honneur.

Je salue mes amis et collègues thésards des salles 200 et 300 ; ils ont créé une ambiance agréable dans le laboratoire. Plus particulièrement, je remercie H. NAPIAS pour nos échanges mathématiques et pour le travail qu'elle a fourni lors de la relecture de cette thèse.

Merci à Mauricette JAUBERT et Daniel YNBOURG, qui ont assuré l'impression de cette thèse. Je n'oublierai certainement pas les nombreuses discussions avec eux...

Enfin, je ne pourrais terminer sans une pensée affectueuse à ma famille et mes amis, qui ont su me soutenir en toutes occasions.

TABLE DES MATIÈRES

- INTRODUCTION ET NOTATIONS.
 - Introduction.
 - Notations.
 - 1 Quelques généralités.
 - 2 Réseaux-Formes quadratiques.
 - 3 Réseaux parfaits et eutactiques.
 - 4 Algorithme de Voronoï.
- Chapitre I. RÉSEAUX À SECTION HYPERPLANE PARFAITE.
 - §1 Introduction et notations.
 - §2 Description de l'algorithme de Laihem.
 - §3 Amélioration de l'algorithme.
 - §4 Résultats.
 - §4.1 Dimension 8.
 - §4.2 Dimension 9.
 - §4.2 Dimension 10.
 - §4.2 Dimension 11.
- Chapitre II. DENSITÉ DES RÉSEAUX EN PATCHWORK
 - §1 Introduction et notations.
 - §2 Étude de la constante d'Hermite sur \mathcal{F} .
 - §3 Expression matricielle de la \mathcal{F} -perfection.
 - §4 Algorithme de Voronoï pour la famille \mathcal{F} .
 - §5 Améliorations de l'algorithme.
 - §6 Résultats.
- Chapitre III. ALGORITHME DE VORONOI ET PROBLÈMES DE DUALITÉ
 - §1 Introduction et notations.
 - §2 Cas des dimensions 6 et 7.
 - §2.1 Étude du chemin de Voronoï reliant \mathbb{E}_6 à \mathbb{E}_6^* .
 - §2.2 Étude du chemin de Voronoï reliant \mathbb{E}_7 à \mathbb{E}_7^* .
 - §3 Étude de la dimension 5.
 - §4 Étude de la dimension 3.
 - §5 Étude de la dimension 9.
- ANNEXES
- RÉFÉRENCES

Introduction

Cette thèse traite de problèmes de géométrie des nombres liés aux empilements de sphères associés à un réseau euclidien. En particulier, on construit algorithmiquement des réseaux pour lesquels la densité de cet empilement est un maximum local (réseaux extrêmes) : leur densité ne peut que diminuer sous l'effet d'une déformation assez petite. Pour étudier ces réseaux, Korkine et Zolotareff introduisent en 1875, en termes de formes quadratiques, la notion de perfection, plus faible que celle d'extrémalité mais qui a l'avantage de pouvoir s'exprimer dans le cadre de l'algèbre linéaire. Traduite géométriquement, cette notion fait intervenir les vecteurs minimaux du réseau (c'est-à-dire les plus courts vecteurs non nuls, dont le carré de la norme euclidienne est par définition la norme du réseau) :

Un réseau est parfait s'il perd des vecteurs minimaux dès qu'on le déforme. (La définition formelle est donnée à la fin de ce chapitre.)

En 1908, Voronoï reprend l'étude des réseaux parfaits. Il prouve que, pour une dimension n donnée, ils sont en nombre fini à similitude près. Il introduit, dans l'espace des réseaux, une relation de contiguïté entre réseaux parfaits pour laquelle le graphe est connexe. Il donne ainsi un algorithme permettant d'obtenir, pour une dimension donnée, toutes les classes de similitude des réseaux parfaits à partir de l'un d'entre eux (cf. 0.4). C'est autour de cet algorithme que s'articulent les trois chapitres de cette thèse.

Cet algorithme permet à Voronoï de retrouver les 8 réseaux parfaits de dimensions inférieures ou égales à 5 (liste établie par Korkine et Zolotareff) et d'amorcer l'étude de la dimension 6. [Incidentement, Voronoï découvre un réseau parfait non extrême, ce qui le conduit à introduire la notion d'eutaxie.] En 1957, cette étude est reprise avec succès (et sans ordinateur) par Barnes ([Bar1],[Bar2]).

Implanté sur ordinateur, cet algorithme énumère en quelques heures les réseaux parfaits jusqu'à la dimension 6. Toutefois, le nombre des réseaux à traiter croît très rapidement avec n , et jusqu'à la fin des années 80, la dimension 7 paraissait hors d'atteinte par cette méthode (bien que plusieurs résultats partiels aient été obtenus par Stacey, Conway et Sloane, etc.). Pourtant, F. Sigrist puis D.O. Jaquet reprennent cette méthode, qui permet à Jaquet de confirmer en 1990 que la liste des 33 réseaux parfaits de rang 7 établie par Stacey (par d'autres méthodes) est complète. Lors de cette recherche, Jaquet a dû faire tourner son programme plus de 100 jours pour obtenir tous les contigus du réseau de racines \mathbb{E}_7 .

On peut donc penser que l'énumération complète des réseaux parfaits de rang 8 par cette méthode n'aboutirait pas au bout d'un temps raisonnable. Une première étape a toutefois été achevée par Jaquet, qui a déterminé les 48 contigus du réseau de racines \mathbb{D}_8 (ainsi que les 226 contigus du réseau \mathbb{D}_9 ([Jaq1], 1992)).

Afin de pouvoir prétendre traiter de façon analogue des dimensions supérieures, on est donc amené à restreindre l'étude à certaines *familles affines* de réseaux *a priori* intéressants

du point de vue de la densité, ou des symétries, ou de la dualité... et pour lesquelles on puisse utiliser un algorithme se déroulant dans un sous-espace de dimension raisonnable de l'espace des réseaux.

Un première idée consiste à définir une méthode de récurrence à partir de réseaux de dimensions inférieures connus. Systématisant la méthode de *d'extension* introduite par Barnes ([Bar3]), on peut par exemple imposer aux réseaux une section hyperplane donnée de même norme. Cette méthode, mise au point par M. Laihem ([Lai], 1992) lui a permis d'obtenir, par un algorithme se développant dans un espace T de dimension 8, la liste des 1171 réseaux parfaits de rang 8 construits à partir des 30 réseaux parfaits de rang 7 différents de A_7 , D_7 , E_7 ; il a aussi proposé une liste vraisemblable de 4 extensions parfaites pour ces trois réseaux. Pour ce dernier cas, la difficulté résidait dans l'énumération des contigus du réseau de racines E_8 .

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous reprenons cette étude en perfectionnant l'algorithme pour réduire le temps d'exécution des programmes. Cela nous permet de confirmer qu'il n'y a que 4 réseaux parfaits de dimension 8 au-dessus des trois réseaux de racines de dimension 7. On construit aussi les extensions de réseaux classiques denses dans des dimensions supérieures (9, 10, 11). On obtient ainsi des réseaux (pour la plupart nouveaux) intéressants du point de vue de l'empilement de sphères associé.

Cette sélection de réseaux à section hyperplane parfaite élimine sans doute beaucoup de réseaux : alors que jusqu'à la dimension 6 presque tous les réseaux sont susceptibles d'une telle définition, seulement 15 des 33 réseaux parfaits de dimension 7 ont une section hyperplane parfaite ; et d'ailleurs H. Napias vient de construire, en dimension 8, par contiguïté à partir des réseaux les moins denses de la liste de Laihem, plus de cinq mille réseaux parfaits sans section hyperplane parfaite!

C'est pourquoi, dans le second chapitre de cette thèse, nous utilisons un autre procédé de récurrence. On restreint l'étude de la densité à une famille \mathcal{F} de réseaux en *patchwork*, c'est-à-dire sommes directes de réseaux de même norme isométriques à des réseaux donnés. Comme précédemment, on recherche les réseaux de \mathcal{F} les plus denses parmi ceux qui réalisent un maximum local de densité sur \mathcal{F} (réseaux \mathcal{F} -extrêmes). On obtient pour ces réseaux des résultats analogues à ceux de Voronoï . Comme dans le cas classique, on les caractérise par des propriétés liées à leurs vecteurs minimaux ; notamment, on définit la notion de \mathcal{F} -perfection, moins restrictive que la notion classique de perfection, et qui, cependant, coïncide avec elle lorsque les sections imposées sont parfaites. Cette étude débouche donc bien sur un nouveau procédé de construction de réseaux parfaits par récurrence. Par exemple, lorsque chaque section imposée est de dimension 1, on obtient une méthode de construction des réseaux parfaits ayant une base de vecteurs minimaux. L'autre situation extrême consiste à imposer une section hyperplane et une section de rang 1. Il s'agit alors d'une étude proche de celle des extensions développée au premier chapitre, mais plus restrictive (il existe une extension de D_9 qui n'est pas un tel patchwork).

D'une façon générale (que les réseaux de départ soient parfaits ou non) nous montrons que les réseaux \mathcal{F} -parfaits sont à similitude près en nombre fini et nous développons un algorithme à la Voronoï dans cette famille affine. Remarquons qu'une telle étude algorithmique de famille affine de réseaux, généralisant celle de Laihem, a été proposée par

Bergé, Martinet et Sigrist ([B-M-S], 1992), mais sous des hypothèses trop restrictives pour pouvoir être directement appliquée ici (voir chapitre II, Remarque suivant 3.3).

On applique cet algorithme à la construction de nouveaux réseaux parfaits de dimensions moyennes et, en particulier, on détermine tous les réseaux parfaits de rang 8, sommes directes d'un réseau parfait de rang 6 et du réseau parfait de rang 2 parmi lesquels on trouve exactement 53 réseaux parfaits sans section hyperplane parfaite.

On sait que les réseaux parfaits sont proportionnels à des réseaux entiers (sur lesquels le produit scalaire ne prend que des valeurs entières), et on constate que les plus denses d'entre eux sont généralement pairs (le produit scalaire ne prend que des valeurs paires). Notre étude de patchwork de réseaux impairs confirme ce fait expérimental.

Dans les deux premiers chapitres, on a utilisé l'algorithme de Voronoï (ou l'un de ses dérivés) pour construire des réseaux parfaits. Dans le troisième chapitre, nous l'utilisons comme moyen d'exploration de l'espace des réseaux. On s'y intéresse plus particulièrement aux propriétés de dualité. On construit notamment des familles à un paramètre stables par dualité, par exemple des chemins de Voronoï dans lesquels se situent un réseau et son dual, sur lesquels on recherche des réseaux *isoduaux* (semblables à leurs duals) : c'est ainsi que l'on a retrouvé les réseaux isoduaux les plus denses connus à ce jour pour les dimensions 5, 6 et 7, réseaux que Conway et Sloane ont construits par d'autres méthodes ([C-S1], 1994), et nous améliorons leur record pour la dimension 9. On étudie aussi, dans ce chapitre, la densité moyenne d'un réseau et de son dual. Nous construisons notamment un réseau extrême de dimension 9 qui réalise la valeur record de cette densité en dimension 9.

Nous remercions les auteurs du système de calcul PARI (Ch. Batut, D. Bernardi, H. Cohen et M. Olivier), et en particulier Ch. Batut dont nous avons aussi utilisé certains programmes non intégrés au système PARI.

Notations

Dans cette thèse, E désigne un espace euclidien de dimension n dont on note $x.y$ le produit scalaire. Par abus de langage, on appelle *norme* d'un vecteur x de E le *carré* $N(x) = x.x$ de sa norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x.x}$.

1. Quelques généralités.

Un *réseau* L de E est un sous-groupe discret de rang maximum, c'est à dire de rang n . C'est donc aussi un \mathbb{Z} -module libre engendré par une base β de E .

Soit L un réseau de E , on appelle *norme* (ou *minimum*) de L le nombre réel

$$N(L) = \inf_{x \in L \setminus \{0\}} N(x);$$

la *sphère* de L ,

$$S(L) = \{x \in L, N(x) = N(L)\},$$

est l'ensemble des *vecteurs minimaux* de L , c'est-à-dire ceux dont la norme réalise le minimum de L . On note $s(L) = \frac{1}{2}|S(L)|$ le nombre de couples de vecteurs minimaux $(\pm x)$ de L . Classiquement, on associe au réseau L l'*empilement des sphères* de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{N(L)}$ ayant pour centres les points du réseau ; l'entier $s(L)$ s'interprète alors comme la moitié du *kissing number*, nombre de contacts des sphères de l'empilement avec la sphère centrée à l'origine.

Soient $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ une base orthonormée de E et $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ une base de L , le *discriminant* de L est le réel positif

$$\Delta(L) = |\det_\epsilon(\beta_1, \dots, \beta_n)|.$$

C'est le volume du paralléloèdre $P = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \beta_i, \quad 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$ engendré par la base β . On note $\det(L)$ le carré du discriminant ; c'est aussi le déterminant de la *matrice de Gram* de la base β ,

$$\text{Gram}(L, \beta) = (\beta_i, \beta_j).$$

On note

$$\gamma_n(L) = N(L) \det(L)^{-1/n}$$

l'*invariant d'Hermite* de L . Ce nombre, invariant par similitude, a d'ailleurs une interprétation géométrique : élevé à la puissance $\frac{n}{2}$, il est proportionnel à la densité de l'empilement de sphères associé au réseau. Un des problèmes de la géométrie des nombres est de trouver la valeur maximale $\gamma_n = \max_L \gamma_n(L)$ de cet invariant pour une dimension donnée. On ne connaît cette constante (*constante d'Hermite*) que jusqu'à la dimension 8. Cependant, on en connaît de bonnes majorations en toutes dimensions. Nous donnons une borne grossière de γ_n ci-dessous.

Rappelons les inégalités de Hadamard et d'Hermite. Elles comparent le déterminant d'un réseau L avec les normes des vecteurs d'une base, et donnent donc un encadrement pour son invariant d'Hermite.

Inégalité de Hadamard (1893) : Soient e_1, \dots, e_n n vecteurs indépendants d'un réseau L de E , alors

$$\Delta(L) \leq \|e_1\| \cdot \dots \cdot \|e_n\|.$$

Inégalité d'Hermite : Tout réseau L de E possède une base $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ satisfaisant

$$\|\beta_1\| \cdot \dots \cdot \|\beta_n\| \leq (4/3)^{\frac{n(n-1)}{4}} \Delta(L).$$

On déduit de cette dernière inégalité la majoration suivante de la constante d'Hermite d'un réseau L de E :

$$\gamma_n(L) \leq (4/3)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

[En fait, Minkowski a obtenu des majorations asymptotiques linéaires.]

Rappelons quelques propriétés liées à la dualité.

Soit L^* le *dual* de L , défini par

$$L^* = \{x \in E, \quad x.y \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in L\}.$$

À chaque couple de réseaux (L, L^*) , Berge-Martinet (cf. [B-M]) introduisent en 1989 une variante de γ_n : la *constante d'Hermite duale* $\gamma'_n(L)$ définie par

$$\gamma_n'^2(L) = \gamma_n(L) \cdot \gamma_n(L^*) = N(L) \cdot N(L^*).$$

La méthode classique (qui, en ce qui concerne γ_n , remonte à Korkine et Zolotareff) consiste à rechercher les valeurs maximales γ_n et γ'_n parmi les maxima locaux des invariants $\gamma_n(L)$ et $\gamma'_n(L)$. On montre qu'ils sont atteints sur des réseaux (*extrêmes, dual-extrêmes*) dont les sphères engendrent E : en adoptant la terminologie de A. Ash ("well rounded lattices"), nous qualifierons de tels réseaux de *bien entourés*. Remarquons que dans le cas de l'invariant $\gamma'_n(L)$ qui fait jouer un rôle symétrique à L et à son dual, la sphère du dual d'un réseau dual-extrême engendre également E . On doit donc avoir à la fois $s(L) \geq n$ et $s(L^*) \geq n$.

Voronoi a aussi montré que les réseaux extrêmes sont proportionnels à des réseaux *entiers*, c'est-à-dire sur lesquels le produit scalaire ne prend que des valeurs entières (ce qui est équivalent à dire qu'ils sont contenus dans leurs duals). On verra au chapitre 3 qu'il n'en est pas de même pour la constante γ' .

2. Réseaux-formes quadratiques.

Soient L un réseau de E et β une base de L ; on note A la matrice de Gram de la base β . On définit sur \mathbb{R}^n la *forme quadratique* q associée à la matrice A ,

$$q(X) = {}^t X A X.$$

Elle est définie positive car, pour tout vecteur x de E , représenté dans la base β par le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, on vérifie facilement que

$$q(X) = N(x).$$

Nous dirons que A est *définie positive*. Réciproquement, toute matrice symétrique définie positive peut être interprétée comme associée à un réseau L dans une base convenable de E .

Les notions introduites pour le réseau L peuvent être traduites en terme de formes quadratiques ou de matrices. Par exemple, si x est un élément de L représenté dans la base β par le vecteur X de \mathbb{Z}^n , alors

$$N(L) = \min_{X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} q(X)$$

est appelé *minimum* de q (ou de A) et noté $\min(q)$ (ou $\min(A)$). On note également $S(A) = S(q) = \{X \in \mathbb{Z}^n, q(X) = \min(q)\}$ l'ensemble des vecteurs *minimaux* de A ou de q , soit encore des représentations, dans la base β , des vecteurs minimaux de L .

D'une façon générale, par abus de langage, on emploiera pour les matrices symétriques le vocabulaire des formes quadratiques, et, si elles sont définies positives, celui des réseaux. En fait, algorithmiquement, on préférera le point de vue des formes quadratiques (identifiées parfois à leurs matrices).

Précisons la correspondance réseau-matrice.

Soit $GL_n(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices entières d'ordre n de déterminant ± 1 et soit L un réseau de E de base β . La *matrice de passage* P de la base β à une autre base β' de L appartient au groupe linéaire, et l'on a :

$$\text{Gram}(L, \beta') = {}^t P \text{Gram}(L, \beta) P,$$

où l'on note ${}^t P$ la matrice *transposée* de P . De plus, deux réseaux isométriques ont dans des bases convenables la même matrice de Gram.

On fait ainsi correspondre à une classe d'isométrie de réseaux une *classe d'équivalence modulo* $GL_n(\mathbb{Z})$ de matrices symétriques définies positives, où l'équivalence de deux matrices est définie de la façon suivante :

$$A \sim B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{Z}), \quad B = {}^t P A P.$$

3. Réseaux parfaits et eutactiques.

Afin d'étudier les formes quadratiques *extrêmes*, c'est-à-dire celles qui réalisent un maximum local de la constante d'Hermite, Korkine et Zolotareff introduisent en 1873 la notion moins restrictive de formes parfaites.

Adoptons, en vue des généralisations qui font l'objet des chapitres suivants, le point de vue des réseaux.

Plaçons-nous pour cela dans l'espace des *endomorphismes symétriques* de E

$$\text{End}_s(E) = \{u \in \text{End}(E), \quad {}^t u = u\},$$

où ${}^t u$ est l'endomorphisme transposé de u , défini par

$${}^t u(x).y = x.u(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Cet espace, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, est muni d'une structure euclidienne naturelle par le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \text{tr}(u.v)$, où tr est la forme linéaire trace.

3.1 Définition : Soient $x \in E$ et φ_x la forme linéaire $u \longrightarrow u(x).x$ définie sur $\text{End}_s(E)$. Un réseau L de E est *parfait*, s'il vérifie la propriété suivante :

$$\varphi_x(u) = 0 \quad \forall x \in S(L) \implies u = 0.$$

Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour l'extrémalité, Voronoï introduit la notion d'*eutaxie* dont on donne une définition équivalente ci-dessous.

3.2 Définition : Un réseau L est *eutactique* s'il existe des coefficients ρ_x strictement positifs ($x \in S(L)$) tels que l'endomorphisme trace s'écrive :

$$\text{tr} = \sum_{x \in S(L)} \rho_x \varphi_x.$$

Voronoï montre alors qu'un réseau est extrême si et seulement s'il est parfait et eutactique. Il montre aussi que les réseaux parfaits sont à similitude près et pour une dimension donnée, en nombre fini, et il donne un algorithme qui permet de les trouver tous en un nombre fini d'étapes et que l'on décrit brièvement ci-dessous.

4. Algorithme de Voronoï .

Cet algorithme se déroule dans l'espace des matrices symétriques réelles $n \times n$, $\mathcal{M}_s(n \times n, \mathbb{R})$, que l'on munit d'une structure d'espace euclidien grâce au produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB)$. On appellera cet espace, version matricielle de l'espace des endomorphismes symétriques muni du produit scalaire trace, *espace de Voronoï*.

Soient alors A une matrice symétrique définie positive de minimum N et $S(A) = \{v_1, \dots, v_s\} \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble de ses vecteurs minimaux, définis par les relations :

$${}^t v_i A v_i = \min(A) = N \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

On remarque que ${}^t v_i A v_i = \langle A, v_i {}^t v_i \rangle$, de sorte que, à chaque vecteur minimal v_i , on fait correspondre dans l'espace de Voronoï la matrice

$$V_i = v_i {}^t v_i.$$

Aux formes linéaires φ_x associées dans 3.1 à un réseau L , correspondent en langage matriciel les formes linéaires $M \mapsto \langle M, V_i \rangle$ sur $\mathcal{M}_s(n \times n, \mathbb{R})$, et l'on retrouve donc à partir de 3.1 la définition historique (et algorithmique) de perfection :

La matrice A est parfaite si elle est déterminée de façon unique par la donnée de son minimum N et de ses vecteurs minimaux $v_i \in \mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire que le système suivant

$$\langle M, v_i \rangle = N \quad \forall i \in \{1, \dots, s\},$$

a pour unique solution $M = A$.

Il revient au même de dire que le système des vecteurs V_i est de rang maximum.

Remarquons de même que, lorsqu'on représente un endomorphisme $u \in \text{End}_s(E)$ par sa matrice (symétrique) M dans les bases duales β et β^* , on a $\text{tr}(u) = \langle A^{-1}, M \rangle$, où A désigne la matrice de Gram de β .

La définition 3.2 se traduit donc de la façon suivante pour la matrice A : il existe des coefficients ρ_x strictement positifs ($x \in S(L)$) tels que :

$$A^{-1} = \sum_{x \in S(L)} \rho_x v_i \langle v_i, \cdot \rangle.$$

On appelle *domaine de Voronoï de A* l'enveloppe convexe D_A des demi-droites portées par les V_i ($i \in \{1, \dots, s\}$). On voit donc que A est parfaite si et seulement si son domaine de Voronoï D_A est de rang maximum (c'est-à-dire $\frac{n(n+1)}{2}$). Supposons qu'il en soit ainsi. Une *face* de codimension 1 du domaine D_A de A parfaite est l'intersection de D_A avec un *hyperplan d'appui* F , que l'on peut représenter par un *vecteur de face* B orthogonal à l'hyperplan F et dirigé vers l'intérieur du domaine :

$$\langle B, V_i \rangle = 0 \quad \forall V_i \in F \quad \text{et} \quad \langle B, V_i \rangle \geq 0 \quad \forall V_i.$$

On définit de façon analogue une face de dimension quelconque. En particulier, on appelle *arête* du domaine une face de dimension 1.

Soit B un vecteur de face du domaine de A ; pour tout réel strictement positif ϵ suffisamment petit, la matrice $A + \epsilon B$ a encore pour minimum N mais a pour sphère le sous-ensemble des vecteurs minimaux v_i de A tels que $V_i \in F$. On pose

$$\rho = \sup\{\epsilon \mid \min(A + \epsilon B) = N\}.$$

On montre que cette valeur existe, est atteinte et que la matrice $A' = A + \rho B$ est de nouveau parfaite. On l'appelle *contiguë de A par la face F* . Voronoï montre que si l'on part d'une forme parfaite arbitraire et si l'on itère la recherche des formes contiguës en supprimant à chaque étape les matrices équivalentes à une matrice déjà trouvée, on obtient la liste de toutes les formes quadratiques parfaites (à équivalence près). Il donne alors l'algorithme suivant :

- 0. Trouver une matrice A parfaite.
- 1. Déterminer la liste des faces de son domaine de Voronoï .
- 2. Déterminer la contiguë de A pour chaque face.
- 3. Supprimer de la liste des contiguës toutes les formes équivalentes à une forme déjà rencontrée.
- 4. Si l'on a trouvé une matrice nouvelle, aller en 1 ; sinon terminer.

Dans la pratique, cet algorithme a permis de trouver ou de retrouver les 48 formes parfaites de rang inférieur ou égal à 7.

Chapitre I

Réseaux à section hyperplane parfaite

Dans sa thèse (1990), Laihem met au point un algorithme qui lui permet d'énumérer les réseaux parfaits de dimension 8 ayant une section hyperplane parfaite de même norme autre qu'un réseau de racines. Il donne aussi 4 extensions des réseaux de racines \mathbb{E}_7 , \mathbb{D}_7 et \mathbb{A}_7 sans pouvoir prouver que ce sont les seules. Dans cette première partie, nous achevons la preuve grâce à une amélioration de l'algorithme de Laihem :

il y a exactement 1175 réseaux parfaits de dimension 8 ayant une section hyperplane parfaite de même norme.

Cet algorithme nous permet également de construire des réseaux assez denses dans des dimensions supérieures parmi les extensions de certains réseaux classiques de dimensions 8, 9, 10.

I.1. Introduction et notations

On se place dans un espace euclidien E de dimension n et l'on considère un réseau L_0 de dimension $(n - 1)$ inclus dans E ; soit H l'hyperplan de E engendré par L_0 . On note \mathcal{R} la famille des réseaux L de E de même norme N que L_0 , et tels que $L \cap H = L_0$:

$$\mathcal{R} = \{L \text{ réseau de } E, \quad L \cap H = L_0 \text{ et } N(L) = N(L_0) = N\}.$$

Par abus de langage, nous adopterons pour de tels réseaux L le terme d'*extensions de L_0* , introduit par Barnes pour les formes quadratiques. Dans ce chapitre, on détermine algorithmiquement les réseaux \mathcal{R} -extrêmes d'une telle famille \mathcal{R} , c'est-à-dire ceux qui réalisent un maximum local dans \mathcal{R} de la constante d'Hermite $\gamma_n(L) = \frac{N(L)}{\Delta(L)^{2/n}}$.

Rappelons la méthode mise au point par Laihem. Comme dans le cas classique, il introduit une propriété plus faible, la \mathcal{R} -perfection, facile à tester :

un réseau L de \mathcal{R} est \mathcal{R} -parfait si et seulement si les vecteurs minimaux de L hors de $H = \mathbb{R}.L_0$ engendrent E .

De plus,

dans le cas où L_0 est parfait au sens classique, la notion de \mathcal{R} -perfection est équivalente à celle de perfection.

Il s'agit donc d'une méthode de construction par récurrence de réseaux parfaits en dimension n à partir d'un réseau parfait de rang $n - 1$, méthode implicitement contenue dans

l'article de Barnes ([Bar3], 1959). Laihem obtient aussi, pour les réseaux \mathcal{R} -parfaits, un résultat de *finitude* modulo les isométries de E qui conservent globalement L_0 . Toutes ces propriétés justifient que l'on entreprenne la recherche des extensions de L_0 les plus denses par la détermination de celles qui sont \mathcal{R} -parfaites. D'autant plus qu'il adapte à cette situation l'algorithme de Voronoï en définissant une notion de \mathcal{R} -contiguïté entre réseaux \mathcal{R} -parfaits, relation pour laquelle le graphe est connexe. On donne dans le paragraphe I.2 les grandes lignes de cet algorithme. Disons seulement ici que les calculs se déroulent dans un espace de dimension n au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$.

En appliquant cet algorithme en dimension 8, Laihem trouve les 1171 réseaux parfaits de rang 8 à partir des 30 réseaux parfaits de rang 7 autres que les réseaux de racines A_7 , D_7 et E_7 . Le traitement de ces trois derniers cas aurait exigé un temps de calcul prohibitif et l'on a arrêté le programme après qu'il eût fourni quatre extensions : les réseaux de racines E_8 , D_8 , A_8 et le réseau A_8^2 construit par Barnes comme extension de A_8 . L'ordinateur avait à explorer un nombre considérable de combinaisons de génératrices du domaine de E_8 avant de trouver une face de ce domaine. (D'une façon générale, les temps de calcul croissent très vite avec la différence entre le nombre de vecteurs minimaux hors de la section imposée et la dimension de l'espace dans lequel l'algorithme se déroule.)

On donne dans ce premier chapitre, une méthode pour accélérer les programmes de recherche des contigus d'un réseau \mathcal{R} -parfait, en éliminant par une remarque de convexité certaines génératrices du domaine. Revenant à la dimension 8, cette méthode nous permet d'obtenir tous les contigus (au sens de Laihem) de E_8 et de prouver que les quatre réseaux E_8 , A_8^2 , D_8 , A_8 sont bien les seuls au-dessus des trois réseaux de racines de dimension 7.

Dans le dernier paragraphe, on applique l'algorithme en dimensions 9, 10, 11, notamment à partir de réseaux parfaits classiques (réseaux de racines, réseaux laminés ...), et l'on obtient dans chaque cas des listes complètes d'extensions parfaites dont nous étudions les nouvelles venues.

I.2. Description de l'algorithme de Laihem.

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les différentes étapes de l'algorithme de Voronoï adapté à l'étude de la famille \mathcal{R} . Pour une étude plus approfondie, on réfère le lecteur aux travaux de thèse de M. Laihem [Laih].

Soit L appartenant à \mathcal{R} où \mathcal{R} est la famille des réseaux définie ci-dessus (L possède donc une section hyperplane isométrique au réseau L_0 ; de plus on a $N(L) = N(L_0) = N$ et donc $S(L_0) \subset S(L)$). Fixons une matrice de Gram A_0 de L_0 ; tout réseau L de la famille \mathcal{R} admet alors une base ayant une matrice de Gram A de la forme :

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & A_0 & & \vdots \\ & & & * \\ * & \dots & * & * \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de la forme ci-dessus et de minimum N ($N = \min(A) = \min(A_0)$) ; c'est un cône convexe de la variété affine des

matrices qui ont un coin supérieur gauche égal à la matrice de Gram A_0 . On note

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} & & * \\ & 0 & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-espace vectoriel associé, qui est de dimension n et que l'on munit du produit scalaire \langle, \rangle . C'est relativement à cet espace que se déroulent l'algorithme de Voronoï adapté à la famille \mathcal{R} .

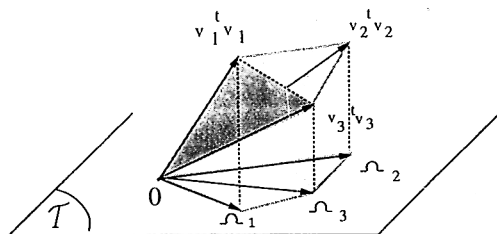
Dans la suite, on emploiera le vocabulaire des formes quadratiques (ou de matrices symétriques) plutôt que celui des réseaux. Cela permet une approche plus algorithmique du problème.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ et $S(A) = \{v_1, \dots, v_s\} \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble de ses vecteurs minimaux, définis par les relations :

$${}^t v_i A v_i (= \langle A, v_i {}^t v_i \rangle) = N \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

Lorsque ces équations linéaires à n inconnues déterminent la matrice A de façon unique dans $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, on dit que la matrice A est \mathcal{R} -parfaite. Remarquons que les vecteurs minimaux de la matrice A_0 n'interviennent pas dans la résolution du système : pour que A soit \mathcal{R} -parfaite, il faut et il suffit que ses vecteurs minimaux hors de la section A_0 engendrent \mathbb{R}^n .

Comme dans le cas classique, on associe à chaque forme \mathcal{R} -parfaite A un domaine convexe, contenu cette fois dans \mathcal{T} : il s'agit de la projection orthogonale $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$ sur le sous-espace \mathcal{T} du domaine de Voronoï D_A de A . On montre facilement que A est \mathcal{R} -parfaite si et seulement si le domaine $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$ est de rang maximum dans \mathcal{T} . Ce domaine est engendré par les projections orthogonales Ω_i sur \mathcal{T} des matrices $V_i = v_i {}^t v_i$ ($v_i \in S(A) \setminus S(A_0)$) (les vecteurs $v_i {}^t v_i$ correspondant à la matrice A_0 n'interviennent pas dans la construction du domaine $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$ puisqu'ils ont une projection orthogonale sur \mathcal{T} nulle). On note s' le nombre de génératrices Ω_i du domaine $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$.



Ensuite, on obtient un résultat de finitude pour les formes \mathcal{R} -parfaites dans $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ modulo l'équivalence définie par :

$$A \sim B \iff \exists P \in \text{Gl}_n(\mathbb{Z}), \text{ tel que } {}^t P A P = B \text{ et } {}^t P T P \subset T.$$

Comme pour le cas classique de l'algorithme de Voronoï, lorsque la matrice A est \mathcal{R} -parfaite, on considère une face d'appui hyperplane F du domaine $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$, représentée par un vecteur de face $B \in \mathcal{T}$ vérifiant :

$$\langle B, \Omega_i \rangle = 0 \quad \forall \Omega_i \in F \quad \text{et} \quad \langle B, \Omega_i \rangle \geq 0 \quad \forall \Omega_i.$$

On associe à cette face la nouvelle forme parfaite de $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$: $A' = A + \rho B$ où

$$\rho = \sup\{\epsilon > 0, \quad \min(A + \epsilon B) = \min(A) = N\}.$$

On obtient ainsi une relation de contiguïté dont le graphe est connexe, et donc un algorithme analogue à celui de Voronoï pour les déterminer, algorithme qui se déroule maintenant dans l'espace \mathcal{T} de dimension n . La principale difficulté dans la pratique de cet algorithme se situe dans la recherche des faces du domaine (la détermination de ρ , dont on sait *a priori* qu'il est rationnel, s'avérant au contraire très rapide dans tous les cas que nous avons traités). En effet, le problème est de trouver tous les hyperplans d'appuis du domaine, et donc d'abord de chercher $(n - 1)$ génératrices indépendantes parmi celles du domaine.

On a donc *a priori* $\frac{s'!}{(n-1)!(s'-n+1)!}$ tests d'indépendance à effectuer.

A titre d'exemple, lorsqu'on cherche les faces du domaine de \mathbb{E}_8 ($s(\mathbb{E}_8) = 120$) en imposant une section hyperplane semblable à \mathbb{A}_7 ($s(\mathbb{A}_7) = 28$), le nombre de génératrices du domaine $s' = 120 - 28 = 92$ est algorithmiquement très important. Expérimentalement, l'algorithme, tel qu'il est décrit ci-dessus, ne permet pas de résoudre dans un temps raisonnable le cas des réseaux pour lesquels la différence $(s' - n)$ est supérieure à 25. C'est à la résolution de cette difficulté qu'est consacré le paragraphe suivant.

I.3. Amélioration de l'algorithme.

Un phénomène nouveau apparaît, qui va permettre d'éliminer, lors de la détermination des faces, un grand nombre de génératrices Ω_i : il s'agit des génératrices qui sont combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs d'autres génératrices. Contrairement au cas classique où cette situation ne se présente pas puisque chaque génératrice est une arête (ce résultat a été démontré par Jaquet [Jaq2]), on verra que l'on peut éliminer un grand nombre de génératrices.

Soit

$$\Omega = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Omega_i \quad \lambda_i > 0$$

une génératrice du domaine $\text{proj}_{\mathcal{T}}(D_A)$ combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'autres génératrices Ω_i , et soit F une face du domaine contenant Ω et B un vecteur de face correspondant. On a donc :

$$\langle B, \Omega \rangle = \sum_{i=1}^k \langle B, \Omega_i \rangle,$$

avec

$$\langle B, \Omega_i \rangle \geq 0 \quad \forall i \leq s'.$$

Comme les coefficients λ_i sont strictement positifs l'équation $\langle B, \Omega \rangle = 0$ entraîne la nullité de tous les termes $\langle B, \Omega_i \rangle$ ($1 \leq i \leq k$) ; ce qui veut dire que toutes les génératrices Ω_i appartiennent à la face F .

Lors de la recherche de la face F , le vecteur Ω est inutile puisque l'on pourra construire la face en se servant des vecteurs Ω_i ($1 \leq i \leq k$).

Remarquons d'abord que deux génératrices du domaine ne peuvent pas être proportionnelles.

En effet, si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ est un vecteur minimal de A , la génératrice $\Omega = \text{proj}_{\mathcal{T}}(v^t v)$

correspond à la matrice : $x_n \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & 0 & \vdots \\ & & x_{n-1} \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$.

On détermine alors toutes les relations de la forme :

$$\Omega = \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2$$

avec λ_1 et λ_2 positifs. [Dans la pratique, on applique la fonction `kerint()` de PARI pour chaque triplet de génératrices.] L'examen de ces relations permet d'éliminer un nombre suffisant de génératrices inutiles pour la détermination effective des faces du domaine.

On peut maintenant appliquer l'algorithme de Laihem aux formes ayant un grand nombre de vecteurs minimaux, et en particulier traiter le cas des réseaux de racines.

I.4. Résultats.

Dans les exemples ci-dessous, on construit principalement les extensions de réseaux de racines ou de réseaux qui leur sont liés. Nous obtenons dans chaque cas la liste complète des extensions \mathcal{R} -parfaites à isométrie près, ce qui nous permet de calculer la constante d'Hermite pour la famille \mathcal{R} . Dans certains cas, nous précisons le graphe de contiguïté des réseaux obtenus et leurs propriétés (perfection, eutaxie, extrémalité, etc). On les énumère par ordre de densité décroissante dans des tableaux dans lesquels figurent leurs caractéristiques : dans la première colonne figure s'il y a lieu le nom du réseau dans la terminologie de Conway et Sloane [C-S2] ou de Barnes [Bar2]. Tous les réseaux trouvés sont parfaits donc proportionnels à des réseaux entiers ; on donne dans les deuxième et troisième colonnes le déterminant (\det) et la norme μ du plus petit homothétique entier. On précise ensuite les nombres s, s^* de couples $(\pm x)$ de vecteurs minimaux du réseau et de son dual. Enfin, on donne la constante d'Hermite, γ et le carré de la constante d'Hermite duale $\gamma'^2 = \gamma\gamma^*$ (où γ^* est l'invariant d'Hermite du dual), arrondies à trois décimales. Enfin, dans la dernière colonne, on étudie l'extrémalité du réseau (E, extrême ; N-E, non-extrême ; s-e, semi-eutactique).

I.4.1 Dimension 8 :

Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux extensions des trois réseaux de racines \mathbb{E}_7 , \mathbb{D}_7 et A_7 . Pour les extensions des trente autres réseaux parfaits de rang 7, on se référera à la liste informatisée sous forme PARI construite par Laihem ([Lai]). On donne dans chaque cas le graphe de contiguïté où l'on représente la relation de contiguïté entre deux réseaux \mathcal{R} -parfaits par une arête du graphe. A la fin de ce paragraphe, on rappelle, dans un tableau, les caractéristiques des réseaux trouvés (apparus depuis bien longtemps dans la littérature).

Les extensions de \mathbb{E}_7 :

Les seuls réseaux parfaits ayant une section hyperplane parfaite de même norme semblable au réseau \mathbb{E}_7 sont le réseau de racines \mathbb{E}_8 et le réseau A_8^2 de Barnes.

La méthode de réduction du nombre des vecteurs minimaux hors de la section imposée ne permet pas d'abrégier les temps de calculs puisque seulement une génératrice a pu être supprimée. Il reste donc 56 génératrices du domaine. Sur une machine du type SPARC 10, on trouve les \mathcal{R} -voisins du réseau \mathbb{E}_8 en 345812 sCPU. Ce temps, lié à la machine, correspond à trois jours de calculs environ.

Graphe de contiguïté



Les extensions de \mathbb{D}_7 :

Il n'y a que les deux réseaux de racines \mathbb{D}_8 et \mathbb{E}_8 .

Après l'élimination des génératrices intérieures du nouveau domaine de \mathbb{E}_8 (on en supprime 46 sur 78), il a fallu 21477 sCPU pour déterminer les faces du \mathcal{R} -domaine de \mathbb{E}_8 , ce qui correspond à une dizaine d'heures de calcul.

Graphe de contiguïté

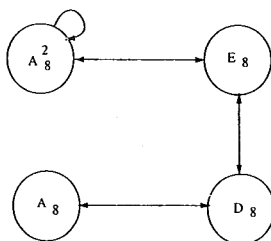


Les extensions de A_7 :

Dans ce cas, on obtient les trois réseaux de racines A_8 , E_8 , D_8 et le réseau A_8^2 .

Ici, nous avons pu éliminer 64 génératrices intérieures au domaine de E_8 (il en reste seulement 28) ; le temps de calcul est encore une dizaine d'heures.

Graphe de contiguïté



On vient donc de montrer le résultat suivant :

I.4.1.1. Théorème : Il y a exactement 4 réseaux parfaits de rang 8, à savoir A_8 , D_8 , E_8 et A_8^2 , ayant une section hyperplane de même norme isométrique à l'un des trois réseaux de racines de rang 7.

En ajoutant à cette liste les 1171 réseaux trouvés par Laihem au-dessus des trente autres réseaux parfaits de rang 7, on montre :

I.4.1.2. Corollaire : Il y a exactement 1175 réseaux parfaits de rang 8 ayant une section hyperplane parfaite de même norme.

L'étendue de cette liste (et le peu d'intérêt de la "queue de liste") suffirait à dissuader d'entreprendre un travail d'énumération analogue pour des dimensions supérieures. Nous nous sommes donc bornés, pour les dimensions 9, 10 et 11, à énumérer les extensions de quelques réseaux intéressants soit du point de vue de la densité soit de celui de la dualité.

On rappelle ci-dessous les caractéristiques des 4 réseaux E_8 , A_8^2 , D_8 et A_8 , puisque, au moins pour les trois premiers, nous allons en chercher les extensions.

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
E_8	1	2	(120,120)	$2^{14}3^35^27$	2	4	E
A_8^2	576	4	(71,1)	$2^83^25.7$	1.807	1.333	E
D_8	4	2	(56,8)	$2^{15}3^25.7$	1.681	2	E
A_8	9	2	(36,1)	$2^83^45.7$	1.519	1.777	E

I.4.2 Dimension 9 :

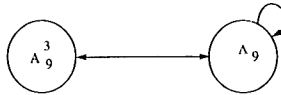
Les extensions de \mathbb{E}_8 :

Ici encore, on ne trouve que des réseaux connus, le réseau laminé Λ_9 conjecturalement le plus dense en dimension 9 et le réseau A_9^3 construit par Barnes par raffinement de A_9 (c'est aussi une extension de $A_8^3 \sim \mathbb{E}_8$).

I.4.2.1. Proposition : *Les seules extensions parfaites de \mathbb{E}_8 sont les réseaux Λ_9 et A_9^3 .*

Remarquons dans ce cas, que la différence entre le nombre de génératrices du domaine de Λ_9 et la dimension ne dépasse pas 7. Les temps de calculs, pour obtenir le graphe de contigüité suivant, sont inférieurs à une seconde.

Graphe de contigüité



	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ^2	Extr
Λ_9	512	4	(136,1)	10321920	2	2	E
A_9^3	21870	6	(129,1)	725760	1.976	1.8	E

Les extensions de \mathbb{D}_8 :

On obtient les réseaux Λ_9 , \mathbb{D}_9 et un réseau J_9 , lui aussi extrême au sens classique, le plus dense des 226 contigus de \mathbb{D}_9 obtenus par D. O. Jaquet ([Jaq1]). Ses seules sections hyperplanes parfaites sont \mathbb{D}_8 et A_8 .

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ^2	Extr
Λ_9	512	4	(136,1)	10321920	2	2	E
J_9	17915904	12	(65,8)	80640	1.876	2.781	E
\mathbb{D}_9	4	2	(72,9)	185794560	1.714	2	E

Les extensions de A_8^2 :

Parmi les 5 extensions de A_8^2 , on reconnait seulement la plus dense (le réseau Λ_9), et la moins dense (le réseau $A_9^{2,4,2}$ de Barnes, extension de A_8 et raffinement de A_9). On donne les caractéristiques des cinq extensions dans le tableau suivant :

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
A_9	512	4	(136,1)	10321920	2	2	E
	896	4	(91,1)	4608	1.879	2.285	E
	19595520	12	(80,2)	1440	1.857	2.314	N-E
	1152	4	(81,2)	4608	1.827	2	E
$A_9^{2,4,2}$	1280	4	(80,2)	161280	1.806	1.8	E

On observe ici l'un des rares cas où l'ordre des constantes d'Hermite duales diffère de celui des constantes d'Hermite.

Les extensions de L_8^4 :

Le réseau de Barnes L_8^4 , obtenu par raffinement du réseau $A_2 \perp A_2 \perp A_2 \perp A_2$ se retrouve également sous un autre pseudonyme, K'_8 : c'est une section du réseau K_{12} de Coxeter-Todd, qui appartient à la suite K'_n ($0 \leq n \leq 12$) définie par Martinet ([Mar]) à partir de K_{12} par une méthode "d'antilamination". Notons que les réseaux K'_n sont extrêmes pour $n \geq 5$. Parmi les trois extensions de ce réseau $L_8^4 \sim K'_8$, on trouve donc le réseau K'_9 (obtenu aussi par Barnes par extension de L_8^4), intéressant du point de vue de la dualité. Nous avons en effet montré qu'il réalise un maximum local de la constante γ' : comme il est extrême, il suffit pour cela, d'après [B-M1], de vérifier qu'il existe des constantes $\rho_i > 0$ et $\rho'_j > 0$ telles que, si A désigne une matrice de Gram du réseau, V_i les matrices symétriques représentant ses vecteurs minimaux, V'_j celles de son inverse :

$$A \sum_{i=1}^s \rho_i V_i = \sum_{j=1}^{s^*} \rho'_j V'_j A^{-1} \quad (\text{dual-eutaxie.})$$

La valeur $\gamma'(K'_9)$ n'est toutefois pas la meilleure connue à ce jour ; le record est notamment détenu par le réseau A_9^5 de Coxeter (voir chapitre III).

On reconnaît dans la moins dense des trois extensions le réseau L_9^4 de Barnes.

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
K'_9	972	4	(81,13)	2592	1.862	3	E
	1296	4	(68,1)	768	1.803	2.25	E
L_9^4	1458	4	(66,1)	62208	1.780	2	E

Les extensions de K_8 :

Jusqu'ici, nous avons étudié des familles \mathcal{R} de réseaux pour lesquels on impose une section hyperplane parfaite, ce qui conduisait inévitablement à une sélection de réseaux parfaits.

Dans le cas suivant, on impose une section hyperplane isométrique au réseau K_8 de la suite K_n construite par Leech (par antilamination de K_{12}), réseau qui n'est pas parfait

(le défaut de perfection est 1), et l'on obtient 5 réseaux \mathcal{R} -parfaits, qui sont également parfaits au sens classique. Ce sont les premiers exemples de réseaux parfaits construits à partir d'une section hyperplane non-parfaite.

À notre connaissance, le seul de ces réseaux déjà apparu dans la littérature est le réseau K_9 (semblable au réseau L_9^2 de Barnes).

Le plus dense de la liste, qui est extrême, est une section (la deuxième en densité après Λ_9) du réseau laminé Λ_{10} , qui réalise la meilleure constante d'Hermite connue en dimension 10. Sa section la plus dense en dimension 8 (non parfaite) se trouve sur un chemin de contiguïté de \mathbb{E}_8 à lui-même sur lequel on a $s = 75$, ce qui est, d'après Watson, le record pour les réseaux distincts de \mathbb{E}_8 (le réseau K_8 n'en possède que 66).

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
K_9	768	4	(99,3)	18432	1.911	2.666	E
	864	4	(90,3)	2304	1.887	2.666	E
	960	4	(84,1)	384	1.865	2.400	
	528384	8	(76,1)	96	1.850	2.232	
	1056	4	(80,1)	192	1.845	2.181	

I.4.3. Dimension 10 :

Les extensions de Λ_9 :

On trouve naturellement le réseau Λ_{10} obtenu par lamination de Λ_9 . Il est intéressant de voir que les cinq autres réseaux sont presque aussi denses que lui. L'un d'eux, qui se distingue par un groupe d'automorphismes énorme ($g = 2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$), est le réseau $B_{10}^{2,4,2}$ de Barnes, raffinement du réseau \mathbb{D}_{10} qu'il contient avec l'indice 2. Ce réseau est en effet une extension de $B_9^{2,4,2} \sim \Lambda_9$.

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
Λ_{10}	768	4	(168,3)	84736	2.058	2.666	E
	960	4	(154,2)	322560	2.012	2.133	E
$B_{10}^{2,4,2}$	1024	4	(154,2)	41287680	2	2	E
	60466176	12	(146,1)	5760	2	2	N-E
	65505024	12	(146,1)	80640	1.984	1.846	E

Les extensions de Λ_9^3 :

Dans ce cas, la famille \mathcal{R} contient 16 réseaux parfaits qui ont au moins 139 (=10+129) vecteurs minimaux ; les constantes d'Hermite sont assez proches du record. Nous donnons dans le tableau suivant les caractéristiques des 8 réseaux les plus denses. On y observe une coïncidence étonnante : les deux réseaux les plus denses de cette liste ont les mêmes caractéristiques excepté l'ordre de leur groupe d'automorphismes. Ils diffèrent d'ailleurs aussi par la structure du groupe déterminant (L^*/L).

det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
54675	6	(147,3)	4354560	2.015	2.4	E
54675	6	(147,3)	7776	2.015	2.4	E
3400690959	18	(141,1)	1440	2.005	2.227	N-E
561273046875	30	(139,2)	5760	2.005	2.283	N-E
59533056	12	(141,2)	288	2.003	2.257	
3419822835	18	(139,1)	2304	2.003	2.265	N-E
61344055296	24	(139,1)	1440	2.001	2.158	N-E
60466176	12	(146,1)	5760	2	2	N-E

Réseaux au-dessus de \mathbb{D}_9 :

Parmi ces réseaux, on obtient bien sûr le réseau \mathbb{D}_{10} et son raffinement unimodulaire \mathbb{D}_{10}^+ . Le réseau le plus dense est le réseau $B_{10}^{2,4,2}$ déjà signalé comme extension de Λ_9 . L'énumération des 9 extensions de \mathbb{D}_9 a été beaucoup plus longue que les précédentes. La difficulté ne provenait pas de l'absence d'une base de vecteurs minimaux pour le réseau \mathbb{D}_{10}^+ (situation à laquelle j'ai adapté l'algorithme standard), mais de la présence du réseau $B_{10}^{2,4,2}$ dont le \mathcal{R} -domaine de Voronoï a un grand nombre de génératrices (82, contre 18 pour son domaine au-dessus de Λ_9).

Les réseaux trouvés sont relativement peu denses, mais sont toutefois tous extrêmes et beaucoup plus intéressants du point de vue de la dualité que les précédents, bien que seuls \mathbb{D}_{10}^+ et \mathbb{D}_{10} soient dual-extrêmes. Notons que la valeur record (à ce jour) de γ' est détenue notamment par le réseau \mathbb{D}_{10}^+ .

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
$B_{10}^{2,4,2}$	1024	4	(154,2)	41287680	2	2	E
\mathbb{D}_{10}^+	1024	4	(90,90)	1857945600	2	4	E
	65505024	12	(90,9)	725760	1.984	3.282	E
	1191182336	16	(82,9)	725760	1.979	3.380	E
	11600000000	20	(82,6)	34560	1.970	3.103	E
	1275068416	16	(85,5)	46080	1.965	2.947	E
	73903104	12	(92,4)	92160	1.960	2.727	E
	1310720	8	(108,3)	276480	1.955	2.4	E
\mathbb{D}_{10}	4	2	(90,10)	$2^{18}3^45^27$	1.741	2	E

I.4.4. Dimension 11 :

Les extensions de Λ_{10} :

Parmi les 6 extensions, on reconnaît les deux réseaux laminés pour la dimension 11, Λ_{11}^{\min} et Λ_{11}^{\max} , dont les caractéristiques ne diffèrent que par le nombre de vecteurs minimaux et leurs groupes d'automorphismes.

	det	μ	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
Λ_{11}^{\max}	1024	4	(219,4)	3533944	2.130	3	E
Λ_{11}^{\min}	1024	4	(216,4)	98304	2.130	3	E
	1152	4	(204,2)	36864	2.107	2.666	s-e
	1408	4	(188,1)	9216	2.069	2.181	N-E
	262020096	12	(179,1)	192	2.060	2.076	N-E
	272097792	12	(179,1)	1152	2.053	2	N-E

I.4.5. Commentaires

Remarquons que les têtes de listes sont toujours de norme minimale $\mu = 4$, sauf bien entendu les extensions de Λ_9^3 de norme 6. On observe également dans les tableaux ci-dessus un phénomène assez fréquent quoiqu'inexpliqué : lorsqu'on parcourt les listes, le nombre s varie dans le même sens que la densité sauf lorsque la norme μ diminue, à la notable exception du réseau \mathbb{D}_{10} dans la suite des extensions du réseau \mathbb{D}_9 . Notons que la constante d'Hermite des extensions de Λ_9^3 de même que celle des extensions de Λ_{10} , est atteinte sur deux réseaux non semblables.

La construction de réseaux parfaits par cette méthode, sorte de généralisation de la méthode de lamination, permet, à partir d'un réseau de rang $n - 1$ assez dense, d'obtenir des réseaux de rang n également intéressants du point de vue de la densité et du *kissing number*. On retrouve bien entendu la suite Λ_n , $8 \leq n \leq 11$ des réseaux laminés, qui réalisent les meilleures constantes d'Hermite connues, sauf pour $n = 11$.

Par contre, si l'on veut construire des réseaux intéressants du point de vue de la dualité, cette méthode est inefficace (la dualité ne se propage pas par extension), et on constate en effet, dans les tableaux précédents, que les nombres de vecteurs minimaux des duals valent pour la plupart 1, 2, 3, 4. Seuls le réseau de racines \mathbb{E}_8 et l'extension K'_9 de L_8^3 sont intéressants du point de vue de la dualité puisque \mathbb{E}_8 réalise naturellement la meilleure constante d'Hermite duale de dimension 8 ($\gamma'^2(\mathbb{E}_8) = 4$) et K'_9 donne la deuxième connue en dimension 9 ($\gamma'^2(K'_9) = 4$).

Chapitre II

Densité des réseaux en patchwork

Le but de ce chapitre est de construire des réseaux denses qui sont somme directe de réseaux de même norme. On adopte les méthodes locales d'extrémalité pour lesquelles on développe une théorie à la Voronoï. On obtient aussi un algorithme qui permet notamment de déterminer toutes les classes d'isométrie de réseaux parfaits sommes directes de réseaux parfaits donnés, algorithme que l'on applique dans le dernier paragraphe en dimensions moyennes.

II.1. Introduction et notations

Soit E un espace euclidien de dimension n . Dans ce chapitre, on restreint l'étude de la densité à une famille \mathcal{F} de réseaux en *patchwork* de E , c'est-à-dire de réseaux de norme N donnée, sommes directes de r ($r \geq 2$) réseaux $(L_i)_{i \leq r}$ de norme N isométriques à des réseaux (L_i^0) donnés. En particulier, on recherche les réseaux les plus denses de \mathcal{F} parmi ceux dont la constante d'Hermite réalise un maximum local sur cet ensemble (réseaux \mathcal{F} -extrêmes). L'existence de tels réseaux n'est pas assurée *a priori*, mais résulte de la compacité modulo isométrie de la famille \mathcal{F} (cf §.2).

Dans l'espace des réseaux de E , paramétré par le cône des endomorphismes symétriques positifs de E , la famille \mathcal{F} est associée à un sous-espace strict V de l'espace $\text{End}_s(E)$ (elle s'identifie à un convexe de cet espace). Nous introduisons des notions de perfection et d'eutaxie relatives à ce sous-espace qui nous permettent une caractérisation à la Voronoï des réseaux \mathcal{F} -extrêmes. On s'intéresse par la suite davantage à la notion de \mathcal{F} -perfection que l'on caractérise par une propriété des vecteurs minimaux : *un réseau \mathcal{F} -parfait perd de ses vecteurs minimaux hors sections dès lors qu'il subit une perturbation (tout en restant dans \mathcal{F})* (cf. II.3). De cette propriété d'unicité, nous déduisons les théorèmes attendus de finitude et de rationalité. Nous montrons de plus que ces réseaux sont parfaits (au sens classique) lorsque les sections imposées le sont. Tout ceci justifie notre entreprise d'énumération des réseaux \mathcal{F} -parfaits, à laquelle est consacré le paragraphe 4.

Notamment, lorsque chaque section L_i est de dimension 1, on obtient une méthode de construction des réseaux parfaits ayant une base de vecteurs minimaux.

On y adapte l'algorithme de Voronoï pour la détermination de toutes les formes quadratiques \mathcal{F} -parfaites (nous adoptons en effet maintenant le point de vue plus algorithmique des formes quadratiques). Cet algorithme se déroule dans le sous-espace de matrices symétriques $n \times n$ associé à V ce qui abaisse ainsi la taille des calculs et permet d'aborder des valeurs moyennes de n hors d'atteinte par l'algorithme de Voronoï usuel.

On associe à toute forme quadratique de la famille un domaine convexe de cet espace (les formes \mathcal{F} -parfaites correspondent aux domaines de dimension maximale $\dim(V)$). On définit ici encore une relation de contiguïté entre les formes \mathcal{F} -parfaites, pour laquelle nous obtenons un théorème de finitude et de connexité. Des phénomènes nouveaux apparaissent dans la pratique de cet algorithme, ne serait-ce que parce qu'il se déroule sur un compact et qu'il s'arrête donc au bout d'un nombre fini d'étapes sans qu'il soit nécessaire de tester les équivalences. Toutefois, on introduit une notion d'équivalence compatible avec la contiguïté pour améliorer l'efficacité de l'algorithme. D'autre part, on observe aussi le même phénomène que dans le chapitre I : certaines génératrices du \mathcal{F} -domaine de Voronoï de la forme \mathcal{F} -parfaite peuvent ne pas être des arêtes, et on utilisera la méthode du chapitre I pour les éliminer.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on applique l'algorithme en dimensions $n \leq 10$. Tout d'abord, on teste la rapidité de notre algorithme en déterminant les réseaux parfaits en dimension 5 et 6 auxquels on a imposé une base de vecteurs minimaux (patchwork de n réseaux de rang 1). Nous construisons aussi en ces dimensions des réseaux "presque parfaits" assez denses que nous étudions du point de vue de la dualité, de l'eutaxie et de la norme.

En dimension 8, on ajoute à la liste des 1175 réseaux parfaits à section hyperplane parfaite (cf chap. I) 53 réseaux parfaits patchworks de réseaux parfaits de rang 2 et 6, dont on donne les caractéristiques principales dans l'annexe I.

C'est ainsi qu'en dimension 9 et 10, on ajoute en somme directe des réseaux parfaits de rang 2 et de rang 7 ou 8. Au-dessus du réseau critique \mathbb{E}_7 , on a seulement retrouvé les réseaux A_9^3 et B_9^2 de Coxeter et Barnes. Par contre, on trouve 8 formes parfaites de rang 9 au-dessus du dual \mathbb{E}_7^* (parmi lesquelles aucune n'est entière de norme 3). Le nombre d'extensions parfaites trouvées semble varier en raison inverse du nombre d'automorphismes du réseau de départ. Par exemple, on possède une liste de plus de 600 réseaux parfaits au-dessus de \mathbb{P}_7^6 (notation de Conway et Sloane) qui n'a que 192 automorphismes.

Au-dessus de \mathbb{E}_8 , on trouve une douzaine de réseaux parfaits de rang 10. Les plus denses d'entre eux (parmi lesquels bien sûr le réseau Λ_{10}) ont déjà été rencontrés au chapitre I.

Enfin, situons l'étude du chapitre II par rapport aux études analogues de la littérature. Tout d'abord, la méthode d'extension exposée au chapitre I ne conduit pas *a priori* à des réseaux patchworks de réseaux de dimensions $n-1$ et 1 (voir l'exemple du réseau \mathbb{D}_{10}^+ extension de \mathbb{D}_9). Par ailleurs, on trouve dans [B-M1] une étude de densité dans des familles de réseaux paramétrées par des sous-groupes fermés du groupe linéaire. Il est facile de voir que les réseaux en patchwork ne sont pas susceptibles d'une telle définition.

Par contre, la notion de \mathcal{F} -perfection est un cas particulier de celle qui a été attachée dans [B-M-S] à un sous-espace vectoriel de matrices symétriques. Toutefois, on donne

un exemple (après II.3.3) qui prouve que les hypothèses faites dans [B-M-S] ne sont pas nécessairement vérifiées ici.

II.2. Etude de la constante d'Hermite sur \mathcal{F}

On se donne r réseaux L_i^0 de même norme N et de rangs n_i avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$, et l'on se propose de paramétrer la famille patchwork \mathcal{F} correspondante à partir de l'un de ses réseaux $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$, avec pour tout i $L_i \sim L_i^0$ et $N(L) = N$.

Posons $F_i = \mathbb{R}L_i \quad \forall i$ (on a donc $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$), et soit

$$V = \{v \in \text{End}_s(E) \text{ tels que, } \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad v(F_i) \subset F_i^\perp\}.$$

Alors on a :

$$\mathcal{F} = \{u(L), \quad u \in GL(E), \text{ avec } {}^t u.u - id \in V \text{ et } N(u(L)) = N(L)\}.$$

La démonstration découle immédiatement du lemme suivant.

II.2.1 Lemme. Soient F un sous-espace de E , M un réseau de F et $u \in GL(E)$. Alors la restriction de u à M est une isométrie si et seulement si l'on a :

$$({}^t u u - id)(F) \subset F^\perp,$$

où ${}^t u$ désigne l'endomorphisme transposé de u .

Démonstration :

Soit $u \in GL(E)$. Alors on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u|_M \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \forall x, y \in M \quad u(x).u(y) = x.y \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in M \quad ({}^t u u - id)(x).y = 0 \\ &\Leftrightarrow ({}^t u u - id)(F) \subset F^\perp. \end{aligned}$$

On a obtenu une nouvelle définition de \mathcal{F} à partir de l'un de ses réseaux $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$:

$$\mathcal{F} = \{u(L), \quad u \in GL(E), \text{ avec } {}^t u.u - id \in V \text{ et } N(u(L)) = N(L)\},$$

si V est le sous-espace de l'espace $\text{End}_s(E)$ des endomorphismes symétriques de E :

$$V = \{v \in \text{End}_s(E) \text{ tels que, } \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad v(F_i) \subset F_i^\perp\},$$

où F_i est le sous-espace engendré par L_i .

Remarque sur la condition $N(u(L)) = N(L)$: Soit $S = S(L)$ l'ensemble des vecteurs minimaux de L ; l'application $u \mapsto N(u(x))$ étant continue, pour u voisin de l'identité, les vecteurs minimaux du réseau $u(L)$ proviennent de ceux de L . En posant $v = {}^t u \cdot u - id$,

$$N(u(L)) = \min_{x \in S} N(u(x)) = N(L) + \min_{x \in S} \varphi_x(v) \text{ où } \varphi_x(v) = v(x).x,$$

et donc $N(u(L)) = N(L)$ équivaut à $\min_{x \in S} \varphi_x(v) = 0$. On se place donc dans le cône C de V défini par :

$$C = \{v \in V, \min_{x \in S} \varphi_x(v) = 0\}.$$

Notons que pour tout v suffisamment proche de 0 appartenant à ce cône (plus précisément à valeurs propres supérieures à -1), il existe $u \in \text{End}_s(E)$ défini modulo $\mathcal{O}(E)$ (groupe orthogonal de E) tel que ${}^t u \cdot u - id = v$. En particulier, si $v = 0$ alors u est orthogonal et le réseau $u(L)$ est isométrique à L .

Munissons pour toute la suite \mathcal{F} de la topologie induite par la topologie naturelle sur l'ensemble des réseaux de E . Les voisinages dans \mathcal{F} d'un réseau $L \in \mathcal{F}$ correspondent donc à des voisinages de 0 dans le cône C de V .

On introduit alors une notion analogue à l'extrémalité classique introduite par Korkine et Zolotareff [K-Z].

II.2.2 Définition Un réseau L de \mathcal{F} est \mathcal{F} -*extrême* si sa constante d'Hermite réalise un maximum local dans \mathcal{F} .

L'existence de tels réseaux dans la famille \mathcal{F} s'obtient grâce au théorème de compacité de Mahler [Cas].

II.2.3 Théorème (MAHLER). Soit \mathcal{L} une famille de réseaux vérifiant les deux conditions suivantes :

- (1) Il existe $m > 0$ tel que l'on ait $N(L) \geq m$ pour tout $L \in \mathcal{L}$;
- (2) Il existe $M > 0$ tel que l'on ait $\det(L) \leq M$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.

Alors, \mathcal{L} est d'adhérence compacte.

Les réseaux de la famille \mathcal{F} sont tous de même norme N ; de plus, d'après une généralisation évidente de l'inégalité d'Hadamard,

$$\begin{aligned} \det(L) &= \det(L_1 \oplus \dots \oplus L_r) \\ &\leq \det(L_1) \dots \det(L_r) = \det(L_1^0) \dots \det(L_r^0) \quad \text{pour tout } L \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Les deux hypothèses du théorème de Mahler étant vérifiées, l'ensemble fermé \mathcal{F} est compact. La fonction $L \mapsto \gamma(L) = \frac{N}{\det(L)^{1/r}}$ continue sur l'ensemble \mathcal{F} et à valeurs dans \mathbf{R} admet donc un maximum sur \mathcal{F} . Il existe donc au moins un réseau \mathcal{F} -extrême dans \mathcal{F} .

II.2.4 Caractérisation. La \mathcal{F} -extrémalité équivaut à la condition suivante, où tr désigne la trace :

$$\text{Si } v \in V \text{ vérifie } \min_{x \in S} \varphi_x(v) = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(v) \leq 0, \text{ alors il est nul.} \quad (1)$$

Démonstration :

Soient L un réseau de \mathcal{F} et S l'ensemble de ses vecteurs minimaux. Alors L est \mathcal{F} -extrême si et seulement si pour u assez voisin de l'identité on a : $\gamma(u(L)) \leq \gamma(L)$. Puisque $N(u(L)) = N(L)$, on a l'équivalence :

$$\gamma(u(L)) \leq \gamma(L) \iff \det(u) \geq 1.$$

1) Supposons L \mathcal{F} -extrême, et montrons la condition (1). Soit v non nul appartenant à C tel que $\text{tr}(v) \leq 0$. Prenons v sur la sphère unité Σ de V , et u tel que $u \cdot u = id + \varepsilon v$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'on ait l'implication :

$$v \in C \implies N(u(L)) = N(L).$$

Soit $P_v(X) = \det(X \cdot id - v) = X^n - T_1(v) \cdot X^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot T_n(v)$ le polynôme caractéristique de v . On a $T_1(v) = \text{tr}(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $T_2(v) = \sum_{i < j} \lambda_i \cdot \lambda_j$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de v . (Elles sont toutes réelles car v est symétrique.)

On remarque que : $(T_1(v))^2 = 2 \cdot T_2(v) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 > 2 \cdot T_2(v)$ puisque v est non nul, donc que $T_2(v)$ est strictement négatif si $T_1(v) = 0$.

Grâce au développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\det(id + \varepsilon v) = (-\varepsilon)^n P_v(-1/\varepsilon) = 1 + \varepsilon T_1(v) + \varepsilon^2 T_2(v) + o(\varepsilon^2), \quad (2)$$

on obtient donc les implications (pour $\varepsilon > 0$ assez petit) :

$$\gamma(u(L)) \leq \gamma(L) \implies \det(u) \geq 1 \implies T_1(v) > 0.$$

Ceci est contraire à l'hypothèse $\text{tr}(v) \leq 0$. v est donc nul.

2) Montrons la réciproque. Soit L vérifiant la condition :

$$\begin{cases} v \in C \\ \text{tr}(v) \leq 0 \end{cases} \implies v = 0$$

(c'est en fait une condition sur $S = S(L)$ via le cône C). Soit K l'intersection de Σ avec le cône $C = \{v \in \text{End}_S E, \min_{x \in S} \varphi_x(v) = 0\}$ alors K est compact. Supposons $\text{tr}(v) > 0$ (v est donc non nul) ; d'après (2), il existe $\beta_v > 0$ tel que $\forall t, 0 < t \leq \beta_v$ entraîne $\det(tv + id) > 1$.

Par ailleurs, pour tout t , la fonction $v \mapsto \det(tv + id)$ est continue donc en particulier, pour tout v dans K , il existe un voisinage $B(v)$ de K tel que $\forall w \in B(v)$ $\det(\beta_v w + id) > 1$.

Or la fonction $t \mapsto \log(\det(tv + id))$ est strictement concave (il suffit de calculer la dérivée seconde), donc si $\log(\det(tv + id))$ est positif pour $t = \beta_v$ alors il en est de même sur tout l'intervalle $]0, \beta_v[$. On obtient donc :

$$\forall w \in B(v), \forall t \in]0, \beta_v[, \quad \det(tw + id) > 1.$$

Les voisinages $B(v)$ forment donc un recouvrement du compact K . En extrayant un sous-recouvrement fini $(\bigcup_{i=1}^p B(v_i))$ et en prenant $\beta = \min_{i \leq p} \beta_{v_i}$, on a :

$$\forall w \in K, \forall t \in]0, \beta[, \quad \det(tw + id) > 1.$$

Soit $L' = u(L)$ un réseau de \mathcal{F} non isométrique à L , alors ${}^t u.u - id$ est non nul et appartient au cône \mathcal{C} . D'après ce qui précède, si $0 < \|{}^t u.u - id\| < \beta$, alors le déterminant de u est strictement supérieur à 1, et donc $\gamma(u(L)) < \gamma(L)$.

Remarquons que le maximum local de la constante d'Hermite est strict, ce qui signifie qu'à isométrie près, les réseaux extrêmes sont isolés.

Pour exploiter la condition (1), qui ne fait intervenir que les restrictions à V des φ_x et de la trace, on introduit des notions de perfection et d'eutaxie relatives au sous-espace V .

II.2.5 Définition: Un réseau $L \in \mathcal{F}$ est *\mathcal{F} -parfait* si l'on a la propriété suivante :

$$(\varphi_x(v) = 0 \quad \forall x \in S(L) \text{ et } v \in V \Rightarrow v = 0).$$

II.2.6 Définition: $L \in \mathcal{F}$ est *\mathcal{F} -eutactique* s'il existe des coefficients $\rho_x > 0$ pour tout x dans $S(L)$ tels que :

$$\text{tr}(v) = \sum_{x \in S(L)} \rho_x \cdot \varphi_x(v) \quad \forall v \in V.$$

Remarquons que ces notions sont plus faibles que les notions classiques correspondantes.

Rappelons un théorème de programmation linéaire que l'on utilisera pour la caractérisation des réseaux *\mathcal{F} -extrêmes*.

II.2.7 Théorème. (Stien:kt) Soient W un espace vectoriel réel de dimension finie et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur W , alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\exists \rho_1, \dots, \rho_p$ tous strictement positifs tels que $\rho_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \rho_p \cdot \varphi_p = 0$
- (ii) On a l'implication :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(v) \geq 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(v) \geq 0 \\ v \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(v) = 0 \end{array} \right.$$

On obtient alors l'équivalent du théorème de Voronoï [V] pour les réseaux de \mathcal{F} .

II.2.8 Théorème. Soit $L \in \mathcal{F}$, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- (i) L est \mathcal{F} -extrême.
- (ii) L est \mathcal{F} -parfait et \mathcal{F} -eutactique.

Démonstration :

- ((i) \Rightarrow (ii)) Supposons la \mathcal{F} -extrémalité, c'est-à-dire (d'après II.2.4)

$$\left(\min_{x \in S(L)} \varphi_x(v) = 0 \text{ et } \text{tr}(v) \leq 0 \text{ pour } v \in V \Rightarrow v = 0 \right),$$

et montrons la \mathcal{F} -eutaxie.

La \mathcal{F} -extrémalité nous donne la condition (ii) du théorème de Stiemke pour l'espace V et les formes $(-\text{tr})$ et $(\varphi_x)_{x \in S(L)}$, l'équivalence du théorème donne directement la \mathcal{F} -eutaxie.

Montrons la \mathcal{F} -perfection. Soit $v \in V$ tel que $\varphi_x(v) = 0 \quad \forall x \in S(L)$. On a donc $\min_{x \in S(L)} \varphi_x(v) = 0$, mais on a aussi $\varphi_x(-v) = 0 \quad \forall x \in S(L)$, donc, quitte à changer v en $-v$, on peut supposer $\text{tr}(v) \leq 0$, et par la caractérisation de la \mathcal{F} -extrémalité, v est nul.

- ((ii) \Rightarrow (i)) Soit maintenant un réseau \mathcal{F} -eutactique et \mathcal{F} -parfait, et montrons qu'il est \mathcal{F} -extrême.

Soit $v \in V$ tel que $\min_{x \in S(L)} \varphi_x(v) = 0$ et $\text{tr}(v) \leq 0$; la relation de \mathcal{F} -eutaxie donne la condition (i) du théorème de Stiemke pour les formes $(-\text{tr})$ et $(\varphi_x)_{x \in S(L)}$, et en appliquant la condition (ii) à v , on obtient $\varphi_x(v) = 0, \forall x \in S(L)$ (et $\text{tr}(v) = 0$) ; la \mathcal{F} -perfection permet de conclure : $v = 0$.

Remarque : Dans la pratique, pour trouver tous les réseaux \mathcal{F} -extrêmes, il est beaucoup plus facile de chercher dans un premier temps les réseaux \mathcal{F} -parfaits, puis d'examiner la \mathcal{F} -eutaxie (qui n'est pas toujours facile à détecter).

Enumérons certaines propriétés des vecteurs minimaux des réseaux \mathcal{F} -parfaits ; celles-ci nous permettront une simplification de l'étude algorithmique.

II.2.9 Caractérisation. Soient $L = \bigoplus_{i=1..r} L_i$ un réseau de \mathcal{F} et $S' = S(L) \setminus \bigcup_{i=1}^r S(L_i)$ l'ensemble des vecteurs minimaux hors des sections $(L_i)_{i \leq r}$. Alors L est \mathcal{F} -parfait si et seulement si les restrictions à V des formes φ_x pour $x \in S'$ engendrent V^* , l'espace dual de V .

Démonstration :

Soient W le sous-espace de V^* engendré par les restrictions à V des $(\varphi_x)_{x \in S(L)}$ et $W^\perp = \{v \in V, \varphi_x(v) = 0 \quad \forall \varphi_x \in W\}$ son orthogonal dans V . Par définition de la \mathcal{F} -perfection, on a les équivalences :

$$L \text{ } \mathcal{F}\text{-parfait} \iff W^\perp = \{0\} \iff W = V^*.$$

Par ailleurs, remarquons que les formes φ_x pour $x \in \bigcup_{i=1}^r S(L_i)$ n'interviennent pas dans la construction de W^\perp : en effet, si x est dans une section L_i alors $\forall v \in V \quad \varphi_x(v) = v(x).x = 0$

par définition de V . Donc W est en fait engendré par les restrictions à V des φ_x pour $x \in S'$.

On en déduit qu'un réseau \mathcal{F} -parfait doit avoir suffisamment de vecteurs minimaux hors des sections L_i :

II.2.10 Corollaire. *Le nombre s' de couples $(\pm x)$ de vecteurs minimaux hors des sections $F_i = \mathbb{R}.L_i$ ($i \in \{1 \cdots r\}$) d'un réseau \mathcal{F} -parfait est supérieur ou égal à : $\dim V = \sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i.n_j$ (où $n_i = \dim F_i$).*

Démonstration :

Il est clair que, si L est \mathcal{F} -parfait, on doit avoir $s' \geq \dim(V)$ d'après II.2.9. Calculons donc la dimension de V . (dans des bases convenables) ayant ses blocs diagonaux nuls

Soit \mathcal{M}_0 l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ ayant des blocs diagonaux de dimensions n_1, \dots, n_r nuls, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & A_1^2 & \cdots & \cdots A_1^r \\ {}^t A_1^2 & \boxed{0} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{0} & A_{r-1}^r \\ {}^t A_1^r & \cdots & {}^t A_{r-1}^r & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Tout endomorphisme v de V peut être représenté par une matrice symétrique de \mathcal{M}_0 .

Fixons en effet une base β de E telle que $\beta = \bigcup_{j=1}^r \beta_j$ où $\beta_j = (e_i^j)_{i \in \{1, \dots, n_j\}}$ est une base de F_j et soit β^* sa base duale. Soit $v \in V$. Sa matrice dans les bases (β, β^*) est symétrique ; de plus, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, la condition $v(F_j) \subset F_j^\perp$ équivaut à : $v(e_i^j).e_k^j = 0 \quad \forall i, k \in \{1, \dots, n_j\}$. Donc nécessairement $v(e_i^j)$ est nul sur l'espace engendré par $\{(e_1^j)^*, \dots, (e_{n_j}^j)^*\}$. On aboutit alors à la représentation annoncée dans les bases (β, β^*) . La dimension de V est donc : $\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i.n_j$, d'où le résultat.

Le résultat suivant va nous permettre de construire par récurrence des réseaux parfaits en "patchwork" de dimension donnée.

II.2.11 Théorème. *Soit $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$ avec chaque L_i parfait (au sens classique). Alors L est parfait si et seulement s'il est \mathcal{F} -parfait.*

Démonstration :

Rappelons qu'un réseau L est *parfait* si :

$$(\varphi_x(v) = 0 \quad \forall x \in S(L) \text{ et } v \in \text{End}_s(E) \Rightarrow v = 0),$$

et que si L est *parfait* alors il est nécessairement \mathcal{F} -parfait. Montrons la réciproque sous les hypothèses du théorème.

Soit $v \in \text{End}_s E$ tel que $\forall x \in S \quad v(x).x = 0$. Montrons que v est nul. Il se décompose de manière unique sous la forme $v = v_1 + w$ avec $v_1 \in V^\perp$ et $w \in V$.

Soient $1 \leq j \leq r$ et $(\pm x_k^j)_{k=1..s_j}$ les vecteurs minimaux de L_j ; ils appartiennent aussi à S car L et L_i ont même norme. On obtient donc :

$$v(x_k^j).x_k^j = 0 = v_1(x_k^j).x_k^j + w(x_k^j).x_k^j \quad \forall k = 1 \dots s_j.$$

Or puisque $x_k^j \in F_j$ et $w \in V$, $w(x_k^j) \in F_j^\perp$ donc le dernier terme est nul. Par conséquent $v_1(x_k^j).x_k^j = 0 \quad \forall k$. La perfection des L_j nous conduit à $v_1|_{F_j} = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$ ce qui prouve que $v_1 = 0$. D'où $v = w$ appartient à V ; la \mathcal{F} -perfection de L permet de conclure : $v = 0$.

II.3. Expression matricielle

Dans la suite, on identifiera l'espace vectoriel réel des matrices symétriques sur \mathbb{R}^n avec celui des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n , et on appliquera aux matrices symétriques le vocabulaire des formes quadratiques (matrice positive, définie positive, \mathcal{F} -parfaite, minimum sur \mathbb{Z}^n , ensemble des vecteurs minimaux).

Pour tout j , ($1 \leq j \leq r$), on se donne une représentation de la classe d'isométrie de L_j^0 par une matrice de Gram A_j .

Soit $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$ un réseau de \mathcal{F} , et soit $\beta = \bigcup_{j=1}^r \beta_j$ une base de L où β_j est une base de L_j ayant pour matrice de Gram A_j ; alors la matrice de Gram de cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{A_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{A_r} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des matrices de ce type représentant un réseau de \mathcal{F} (leurs blocs diagonaux A_j sont donc fixés, et elles ont pour minimum N). Toutes les bases utilisées dans la suite seront de la forme ci-dessus.

II.3.1 Proposition. Soit $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$ un réseau de \mathcal{F} , alors il n'existe qu'un nombre fini de représentations de L dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.

Démonstration :

Soient $\beta = (e_i)_{i=1 \dots n}$ une base de L et A sa matrice de Gram dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Les blocs diagonaux de A étant fixés, le maximum D des termes diagonaux de la matrice A ne dépend pas de la base choisie. On a alors :

$$\forall i \leq n, \quad e_i.e_i \leq D.$$

Or il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs dans L vérifiant cette inégalité, donc il n'y a qu'un nombre fini de bases de L dont la matrice de Gram appartient à $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.

Donnons une interprétation matricielle de la proposition II.2.9.

Soient $L = \bigoplus_{i=1}^r L_i$ un réseau de \mathcal{F} et $\beta = \bigcup_{j=1}^r \beta_j$ une base de L de la forme habituelle. On note A sa matrice de Gram dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Tout vecteur minimal x de L peut être représenté dans cette base par $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. On associe à x la projection orthogonale p_x sur la droite $\mathbb{R}x$ définie par $p_x(y) = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$ pour $y \in E$ et la matrice $P_x = P_X = X^t X$ de l'endomorphisme $N(x)p_x$ exprimée dans les bases β^* et β (β^* est la base dual de β). Rappelons que tout endomorphisme symétrique φ_x dans V peut être représenté par une matrice de \mathcal{M}_0 dans les bases β^* et β , où \mathcal{M}_0 est défini au paragraphe II.2.

On munit $\text{End}_s E$ (resp. $M_s(n \times n, \mathbb{R})$) du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \text{tr}(uv)$ (resp. $\langle U, V \rangle = \text{tr}(UV)$).

II.3.2 Corollaire. Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ et S' l'ensemble des vecteurs minimaux hors des sections imposées. Alors A est \mathcal{F} -parfaite si et seulement si les projections orthogonales Ω_X des $P_X = X^t X$ sur \mathcal{M}_0 engendrent \mathcal{M}_0 lorsque X décrit S' .

Remarque : On pose :

$$\mathcal{M}_0^1 = \mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{M_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{M_r} \end{pmatrix}, \quad M_i \in M_s(n_i \times n_i, \mathbb{R}) \right\}.$$

La projection orthogonale sur \mathcal{M}_0 d'une matrice de $\text{End}_s E$ s'obtient en remplaçant les blocs diagonaux par des blocs de zéros. Soit $p_{\mathcal{M}_0}$ cette projection.

Démonstration :

D'après la proposition II.2.8, la \mathcal{F} -perfection d'un réseau L équivaut au fait que le système d'équations $\varphi_x(v) = 0$ pour x minimal hors sections n'a pas de solution non nulle dans V .

Soient $\beta = (e_i) = \bigcup_{j=1}^r \beta_j$ une base de L et v un endomorphisme symétrique de V ; alors v admet une représentation matricielle $B = (v_{ij}) \in \mathcal{M}_0$ dans les bases β et β^* . On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi_x(v) &= v(x) \cdot x = v\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{ij} x_j v_{ij} e_i^* \sum_{k=1}^n x_k e_k \\ &= \sum_{ij} x_j v_{ij} x_j v_{ij} x_i \\ &= \text{tr}(BX^t X) = \langle B, X^t X \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit donc de remarquer que toute matrice de \mathcal{M}_0 n'agit que sur la projection orthogonale Ω_X de P_X sur \mathcal{M}_0 (Ω_X est à blocs diagonaux nuls). Donc $\langle B, X^t X \rangle = \langle B, \Omega_X \rangle$. Il y a donc équivalence entre la \mathcal{F} -perfection d'un réseau L et le fait que les projections orthogonales Ω_X des $P_X = X^t X$ sur \mathcal{M}_0 engendrent \mathcal{M}_0 lorsque X décrit S' .

II.3.3 Proposition. Une matrice A dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ est \mathcal{F} -parfaite si et seulement si elle est déterminée de façon unique par les projections orthogonales Ω_X des P_X sur \mathcal{M}_0 lorsque X décrit $S(A)$ (ensemble des vecteurs minimaux de A).

Démonstration :

Soit A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ ayant le même ensemble des Ω_X ; on a donc :

$$\Omega_X = p_{\mathcal{M}_0}(P_X) = p_{\mathcal{M}_0}(P_{X'}) \quad \forall X \in S(A), \forall X' \in S(A')$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle (A - A'), \Omega_X \rangle &= \langle (A - A'), P_X \rangle = \min(A) - \langle A', P_X \rangle \leq 0 \quad \text{car } \min(A) = \min(A') \\ &= \langle (A - A'), P_{X'} \rangle = \langle A, P_{X'} \rangle - \min(A') \geq 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle A, \Omega_X \rangle = \langle A', \Omega_X \rangle \quad \forall X \in S(A)$$

Donc $A' - A$ appartient à l'orthogonal dans \mathcal{M}_0 du sous-espace engendré par les Ω_X . Puisque A est \mathcal{F} -parfaite, le sous-espace $\langle \Omega_X, X \in S(A) \rangle$ est égal à \mathcal{M}_0 , et on obtient $A = A'$.

Réciproquement, supposons L non \mathcal{F} -parfait ; d'après le corollaire II.3.2 on a :

$$\mathcal{M}_0 \not\subset \langle \Omega_X, X \in S(A) \rangle.$$

Soit $B \neq 0$ dans \mathcal{M}_0 orthogonal à tous les Ω_X . Pour ε assez petit, le minimum de la matrice $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ est atteint sur certains vecteurs minimaux de A , c'est à dire : $S(A_\varepsilon) \subset S(A)$.

Il existe donc $X_0 \in S(A)$ tel que :

$$\begin{aligned} \min(A_\varepsilon) &= \langle A_\varepsilon, P_{X_0} \rangle = \langle (A + \varepsilon B), P_{X_0} \rangle \\ &= \langle A, P_{X_0} \rangle + \varepsilon \langle B, P_{X_0} \rangle \\ &= \min(A) + \varepsilon \langle B, \Omega_{X_0} \rangle \\ &= \min(A) \end{aligned}$$

Donc A_ε est bien une matrice de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ dont les vecteurs minimaux sont contenus dans $S(A)$. Le calcul précédent étant valable pour tout vecteur minimal X de A , on a aussi :

$$S(A) \subset S(A_\varepsilon).$$

Pour ε assez petit, l'ensemble des vecteurs minimaux de A_ε est égal à celui de A . A et A_ε sont donc deux matrices de $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ possédant le même ensemble des Ω_X . Il n'y a donc pas unicité de la matrice A .

Remarque : La notion de \mathcal{F} -perfection est celle de [B-M-S 2.1.] ; toutefois l'hypothèse (II.2.2) sous laquelle les auteurs définissent et étudient leur algorithme peut ne pas être vérifiée. Voici un exemple de réseau \mathcal{F} -parfait dont les *vecteurs minimaux n'engendrent pas l'espace E* .

On prend en dimension 4

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

possède les 6 vecteurs minimaux

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de rang 3 dans \mathbb{R}^4 mais les images Ω engendrent \mathcal{T} .

II.3.4 Corollaire. *Si les matrices A_i sont rationnelles, alors les matrices \mathcal{F} -parfaites dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ le sont aussi.*

Démonstration :

La proposition précédente montre qu'une matrice \mathcal{F} -parfaite est solution unique d'un système d'équations affines de la forme suivante :

$$\langle A, X^t X \rangle = \min(A) \quad \forall X \in S(A).$$

Or dans ces équations les coefficients des matrices $X^t X$ sont entiers. On a donc un système de Cramer à coefficients entiers. Les solutions sont donc rationnelles.

II.3.5 Théorème. *L'ensemble des classes d'isométrie des réseaux \mathcal{F} -parfaits de \mathcal{F} est fini.*

Démonstration :

Soient $L \in \mathcal{F}$ un réseau \mathcal{F} -parfait et $\beta = \bigcup_{j=1}^r \beta_j$ une base de L telle que :

$$\forall j \in \{1 \dots r\} \quad \text{Gram}(\beta_j) = A_j.$$

Soient D le maximum des termes diagonaux de la matrice de Gram de la base β et $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ un vecteur minimal de L exprimé dans la base $\beta = (e_i)$.

S'il n'est pas nul, $|a_i|$ est l'indice dans L du sous-réseau

$$L' = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$$

dont on majore le déterminant par l'inégalité d'Hadamard :

$$\det(L') \leq N(e_1) \dots N(e_{i-1}) N(x) N(e_{i+1}) \dots N(e_n) \leq D^{n-1} N.$$

Par ailleurs, le déterminant d'un réseau de rang n , de norme N , est minoré par $\frac{\gamma_n^n}{N^n}$ où γ_n est la constante d'Hermite en dimension n . On a donc :

$$a_i^2 \leq \frac{\gamma_n^n}{N^n} D^{n-1} N = \gamma_n^n \frac{D^{n-1}}{N^{n-1}}.$$

Les a_i étant entiers, et la majoration étant indépendante du réseau étudié dans \mathcal{F} , on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de n -uplets d'entiers pouvant représenter un vecteur minimal de L . Or la matrice de Gram dans la base β d'un réseau \mathcal{F} -parfait est déterminée de façon unique par les composantes entières de ses vecteurs minimaux dans la base β (prop. II.3.3). On obtient donc un nombre fini de matrices dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ représentant un réseau \mathcal{F} -parfait de \mathcal{F} .

Dans le paragraphe suivant, on adapte l'algorithme de Voronoï à la détermination de tous les réseaux \mathcal{F} -parfaits de \mathcal{F} . En fait, on adoptera le point de vue plus algorithmique des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n .

II.4. Algorithme de Voronoï pour la famille \mathcal{F} .

On note $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des formes quadratiques définies par une matrice A de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Il s'agit donc des formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n de minimum N et telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0) = Q_1(x_1, \dots, x_{n_1}) \\ Q(0, \dots, 0, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}, 0, \dots, 0) = Q_2(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}) \\ \vdots \\ Q(0, \dots, 0, x_{n-n_r+1}, \dots, x_n) = Q_r(x_{n-n_r+1}, \dots, x_n) \end{array} \right.,$$

où les Q_i sont des formes quadratiques données sur \mathbb{R}^{n_i} de même minimum N . Par abus de langage, on appelle sections les sous-espaces de \mathbb{R}^n formés des vecteurs dont toutes les composantes sont nulles sauf peut-être celles d'indices $l \in [n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i]$.

II.4.1 Définitions: Soient Q une forme quadratique de $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ et $S'(Q)$ l'ensemble des vecteurs minimaux hors des sections imposées, le \mathcal{F} -domaine de Voronoï \mathcal{D}_Q de Q est l'enveloppe convexe dans \mathcal{M}_0 des demi-droites fermées portant les Ω_x pour $x \in S'(Q)$.

Rappelons que Ω_x est la projection orthogonale sur \mathcal{M}_0 de $P_x = x^t x$ et que la \mathcal{F} -perfection de Q équivaut au fait que l'intérieur du \mathcal{F} -domaine est non-vidé dans \mathcal{M}_0 . Si Q est \mathcal{F} -parfaite, on appelle *face* \mathcal{R} du \mathcal{F} -domaine \mathcal{D}_Q son intersection avec un hyperplan d'appui (dans \mathcal{M}_0). On lui associe une matrice $B_{\mathcal{R}}$ de \mathcal{M}_0 , unique à homothétie positive près, telle que :

$$\begin{cases} (i) & \langle B_{\mathcal{R}}, \Omega_x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in S(Q) \\ (ii) & \langle B_{\mathcal{R}}, \Omega_x \rangle = 0 \iff \Omega_x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Si $Q_{\mathcal{R}}$ est la forme quadratique définie par la matrice $B_{\mathcal{R}}$, on associe à chaque face \mathcal{R} une nouvelle forme $Q_{\theta} = Q + \theta Q_{\mathcal{R}}$ qui est encore dans $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ puisque $B_{\mathcal{R}}$ est dans \mathcal{M}_0 . Lorsque $\theta > 0$ est proche de 0, les vecteurs minimaux de la forme quadratique Q_{θ} proviennent de ceux de Q . Il existe donc x vecteur minimal à la fois de Q et de Q_{θ} de sorte que :

$$\min(Q_{\theta}) = Q_{\theta}(x) = Q(x) + \theta Q_{\mathcal{R}}(x) \geq \min(Q),$$

et il y a égalité sur l'ensemble des vecteurs minimaux x de Q dont l'image $P_x = x^t x$ dans l'espace de Voronoï se projette orthogonalement sur \mathcal{M}_0 dans la face \mathcal{R} . Pour $\theta > 0$ assez petit, les formes Q et Q_{θ} ont donc même minimum.

Soit $\rho > 0$ la borne supérieure des $\theta \geq 0$ tels que Q_{θ} soit positive de même minimum que Q . Notons que ρ est fini car la forme $Q_{\mathcal{R}}$ n'est pas positive (puisque'elle appartient à \mathcal{M}_0). Il existe alors un vecteur $x \in \mathbb{Z}^n$ tel que $Q_{\mathcal{R}}(x)$ soit négatif, et donc tel que la fonction $\theta \mapsto Q_{\theta}(x)$ soit décroissante. Le phénomène d'*impasse* rencontré dans d'autres variantes de l'algorithme ne se produira pas ici.

Alors, comme dans la cas classique, par définition de ρ , il existe $y \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$\begin{cases} Q_{\rho}(y) = \min(Q) \\ Q_{\theta}(y) < \min(Q) \quad \forall \theta > \rho \end{cases}$$

Le vecteur y est donc minimal de Q_{ρ} et comme :

$$Q_{\theta}(y) = Q(y) + \theta Q_{\mathcal{R}}(y) < \min(Q) = Q(y) \quad \forall \theta > \rho,$$

on obtient :

$$Q_{\mathcal{R}}(y) = \langle B_{\mathcal{R}}, P_y \rangle = \langle B_{\mathcal{R}}, \Omega_y \rangle < 0.$$

La projection orthogonale Ω_y sur \mathcal{M}_0 de $P_y = y^t y$ n'est donc pas dans la face \mathcal{R} . L'ensemble des vecteurs Ω_x pour $x \in S(Q_{\rho})$ contient, en plus des vecteurs qui appartiennent à l'hyperplan \mathcal{R} , $\Omega_y \notin \mathcal{R}$; il engendre donc \mathcal{M}_0 et la forme Q_{ρ} est \mathcal{F} -parfaite.

Cette nouvelle forme appartenant à $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ sera appelée *contiguë* de Q par la face \mathcal{R} .

On construit ainsi à partir d'une forme \mathcal{F} -parfaite un graphe de contiguïté. Montrons, comme Voronoï l'a fait dans le cas classique et A.M. Bergé, J. Martinet, F. Sigris [B-M-S] sous d'autres hypothèses, que toute forme \mathcal{F} -parfaite de $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ appartient à ce graphe. Cela est basé sur le résultat suivant dont on trouve une démonstration dans [Mar].

II.4.2 Lemme (Voronoï). Soient Q une forme quadratique définie positive, K et m deux constantes strictement positives, alors l'ensemble des formes parfaites Q' de minimum m vérifiant $\langle Q, Q' \rangle \leq K$, est fini.

II.4.3 Proposition. Soient Q et Q' deux formes quadratiques définies positives dans $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$ de matrices A et A' dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Supposons Q \mathcal{F} -parfaite, alors il existe un chemin $Q_0 = Q, Q_1, \dots, Q_k$ de formes \mathcal{F} -parfaites telles que Q_i est contiguë à Q_{i+1} et la projection orthogonale sur \mathcal{M}_0 de A' appartienne au \mathcal{F} -domaine de Q_k .

Démonstration :

Supposons que $p_{\mathcal{M}_0}(A') \notin \mathcal{D}_Q$, alors il existe une face de \mathcal{D}_Q dont l'orthogonal $\mathbb{R}.B$ dans \mathcal{M}_0 vérifie :

$$\langle B, p_{\mathcal{M}_0}(A') \rangle = \langle B, A' \rangle < 0.$$

Soit Q_1 la contiguë de Q à travers cette face. On a donc : $\langle Q_1, Q' \rangle < \langle Q, Q' \rangle$. On construit ainsi une suite strictement décroissante

$$\dots < \langle Q_2, Q' \rangle < \langle Q_1, Q' \rangle < \langle Q, Q' \rangle.$$

Les formes Q_i étant \mathcal{F} -parfaites et de même minimum, le lemme II.4.2 permet de conclure que la suite s'arrête à partir d'un certain rang et donc qu'il existe $k > 0$ tel que $p_{\mathcal{M}_0}(A') \in \mathcal{D}_{Q_k}$.

II.4.4 Lemme. (cf. [B-M-S]) Soient Q et Q' deux formes quadratiques \mathcal{F} -parfaites de même minimum et soit $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{Q'}$ l'intérieur du domaine $\mathcal{D}_{Q'}$; alors, si $\mathcal{D}_Q \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{Q'}$ est non vide, $Q = Q'$.

Démonstration :

Soit $G \in \mathcal{D}_Q \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{Q'}$.

Alors $\forall x' \in S'(Q')$ il existe $\beta_{x'} > 0$ tel que $G = \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \Omega_{x'}$ (rappelons que $\Omega_{x'}$ est

la projection orthogonale sur \mathcal{M}_0 des $P_{x'}$ pour $x' \in S'(Q')$).

En notant A et A' les matrices de Q et Q' dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle G, A - A' \rangle &= \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \langle \Omega_{x'}, A - A' \rangle \\ &= \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \langle P_{x'}, A - A' \rangle \\ &= \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \langle P_{x'}, A \rangle - \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \langle P_{x'}, A' \rangle \\ &\geq \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \min(A) - \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \min(A') = 0 \end{aligned}$$

En faisant le même raisonnement avec les Ω_x pour $x \in S(Q)$, on obtient l'inégalité inverse ce qui nous prouve que $\langle G, A' \rangle = \langle G, A \rangle$.

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{x' \in S'(Q')} \beta_{x'} \langle \Omega_{x'}, A - A' \rangle = 0 \\ \langle \Omega_{x'}, A - A' \rangle = \langle P_{x'}, A - A' \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in S'(Q'). \end{array} \right.$$

Comme les $\beta_{x'}$ sont strictement positifs, on a les égalités :

$$\forall x' \in S'(Q'), \langle \Omega_{x'}, A - A' \rangle = 0 ;$$

or les $\Omega_{x'}$ engendrent \mathcal{M}_0 , donc $A - A'$ (qui est dans \mathcal{M}_0) est nul.

II.4.5 Théorème de connexité. Soient deux formes quadratiques Q et Q' \mathcal{F} -parfaites, alors il existe un chemin $Q_0 = Q, Q_1, \dots, Q_k = Q'$ de formes \mathcal{F} -parfaites contiguës.

Démonstration :

Prenons le cas non trivial où Q' n'est pas contiguë à Q . La \mathcal{F} -perfection de Q' nous assure que l'intérieur dans \mathcal{M}_0 de son \mathcal{F} -domaine $\mathcal{D}_{Q'}$ est non vide. Soit $G \in \mathring{\mathcal{D}}_{Q'}$, il existe alors un chemin $Q_0 = Q, Q_1, \dots, Q_k$ de formes \mathcal{F} -parfaites contiguës tel que $G \in \mathcal{D}_{Q_k}$, donc d'après le lemme II.4.4 on a $Q_k = Q'$.

Remarque : On peut donc maintenant élaborer un programme permettant de trouver toutes les matrices \mathcal{F} -parfaites de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ à partir de l'une d'entre elles.

II.5. Améliorations de l'algorithme

Pour améliorer l'algorithme, et en particulier le temps d'exécution des programmes, on introduit une nouvelle notion d'équivalence de deux formes quadratiques.

II.5.1 Définition: Deux formes quadratiques Q et Q' appartenant à $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}$, de matrices A et A' dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, sont dites \mathcal{F} -équivalentes s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{P_1^1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{P_2^2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{P_r^r} \end{pmatrix}, \quad P_i^i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{Z})$$

telle que : ${}^t P A P = A'$.

II.5.2 Proposition. La \mathcal{F} -équivalence entre deux formes \mathcal{F} -parfaites Q et Q' , de matrices dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ A et A' , met en bijection les ensembles de leurs formes contiguës, et plus particulièrement, deux faces \mathcal{F} -équivalentes d'une forme stable par cette équivalence donnent deux contiguës \mathcal{F} -équivalentes.

Démonstration

Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ de la forme de la définition II.4.1 telle que ${}^t P A P = A'$. Soient \mathcal{R} une face du \mathcal{F} -domaine de Q , et $\mathbb{R}.B$ son orthogonal dans \mathcal{M}_0 . On note $A_1 = A + \rho B$ la contiguë de A à travers cette face.

Remarquons que la matrice P stabilise le sous-espace \mathcal{M}_0 et qu'elle définit une bijection entre les vecteurs minimaux de Q et ceux de Q' . En effet, si $x \in S(Q)$ alors $x' = P^{-1}x$ appartient à $S(Q')$.

On a alors pour $x' \in S(Q')$:

$$\begin{aligned} \langle {}^tPBP, \Omega_{x'} \rangle &= \langle {}^tPBP, x'^t x' \rangle = \text{tr}({}^tPBP P^{-1} (x'^t x') {}^tP^{-1}) \\ &= \text{tr}(B x'^t x') = \langle B, x'^t x' \rangle = \langle B, \Omega_x \rangle. \end{aligned}$$

La matrice tPBP est donc un représentant de l'orthogonal d'une face du \mathcal{F} -domaine de A' . Or on a :

$$A_1 = A + \rho B \quad \text{donc} \quad {}^tPA_1P = A' + \rho {}^tPBP.$$

On conclut alors que $A_2 = {}^tPA_1P$ est la contiguë de A' par la face orthogonale à tPBP .

Remarque : Notons qu'on trouve dans [B-M-S] une notion d'équivalence moins restrictive : la condition imposée aux matrices P de changements de bases est simplement ${}^tP\mathcal{M}_0P \subset \mathcal{M}_0$, ce qui suffit à assurer la démonstration précédente. Toutefois, cette condition ${}^tP\mathcal{M}_0P \subset \mathcal{M}_0$, n'est *a priori* pas très facile à détecter d'un point de vue algorithmique.

D'un point de vue géométrique, notre \mathcal{F} -équivalence consiste à considérer seulement les changements de bases qui stabilisent les sections imposées et interdit donc "l'échange" de deux sections isométriques.

Cependant, si l'on considère une famille de patchwork \mathcal{F} dont les sections imposées sont deux à deux non-isométriques, alors on vérifie facilement que les deux notions d'équivalence coïncident dans la pratique.

Le groupe $G_{\mathcal{F}}(A)$ des \mathcal{F} -équivalences stabilisant la forme A agit sur les faces de cette même forme. Pour éviter une recherche trop longue des faces d'une forme, on supprime, comme dans le premier chapitre, les génératrices "intérieures" (remarquons que dans ce cas, deux génératrices du domaine peuvent être proportionnelles), et on détermine seulement un représentant de chaque classe de face. On peut donc élaborer un algorithme semblable à celui de Voronoï pour les formes \mathcal{F} -parfaites.

- 0. Trouver une forme \mathcal{F} -parfaite $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ (on utilise un programme de balayage).
- 1. Trouver les vecteurs minimaux hors des sections imposées et stocker les Ω_x sous forme de vecteurs à $t = \sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j$ composantes.
- 2. Déterminer le groupe $G_{\mathcal{F}}(A)$ des \mathcal{F} -équivalences conservant la forme ($i \leftarrow 0$; $f \leftarrow 0$).
- 3. Supprimer des génératrices "intérieures".
- 4. (Back-tracking) Choisir un Ω_x linéairement indépendant de ceux déjà stockés ($i \leftarrow i + 1$).
- 5. Si la classe modulo $G_{\mathcal{F}}(A)$ du sous-espace formé par les Ω_x a déjà été trouvée, ($i \leftarrow i - 1$) et aller en 4.
- 6. Sinon
 - + Si $i < t - 1$ aller en 4.
 - + Sinon tester si c'est une face.
 - * Si ce n'est pas une face, ($i \leftarrow i - 1$) et aller en 4.
 - * Sinon stocker la face ($f \leftarrow f + 1$; $i \leftarrow i - 1$) et aller en 4.

- 7. Etablir la liste des contiguës A_1, \dots, A_f .
- 8. Supprimer de la liste toute forme \mathcal{F} -équivalente à une forme déjà rencontrée.
- 9. Terminer si aucune forme nouvelle n'a été conservée, sinon aller en 2 (en prenant une nouvelle forme).

D.O. Jaquet constate dans [Jaq] que la complexité de l'algorithme de Voronoï classique dépend de la différence D entre le nombre s de paires de vecteurs minimaux et la dimension de l'espace des matrices symétriques, $\frac{n(n+1)}{2}$. Dans notre cas, on travaille dans un espace \mathcal{M}_0 de dimension inférieure ($\dim(\mathcal{M}_0) = \sum_{i < j} n_i \cdot n_j$) et seuls les vecteurs minimaux hors des

sections interviennent dans l'algorithme (soit s' le nombre de ces paires de vecteurs). La complexité de notre algorithme dépend donc de la différence $D' = s' - \dim(\mathcal{M}_0)$.

Concrètement, on remarque que si D' est supérieur à 12, une semaine est nécessaire pour trouver toutes les contiguës d'une forme. Par ailleurs, si cette différence dépasse 25, on ne peut trouver toutes les contiguës en un temps raisonnable. Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux trouvés dans le cas classique par D.O. Jaquet.

Considérons plus particulièrement le cas où les sections imposées L_i sont de rang 1. La famille \mathcal{F} est donc l'ensemble des réseaux de E de norme N et ayant une base de vecteurs minimaux, de sorte que les réseaux \mathcal{F} -parfaits sont les réseaux parfaits (au sens usuel) qui ont une base de vecteurs minimaux. Cette restriction ne change pas la différence D' . En effet, si s est le nombre de paires de vecteurs minimaux de la forme étudiée, on a : $s' = s - n$ et on vérifie facilement que :

$$D' = s' - \dim(\mathcal{M}_0) = s' - \frac{n(n-1)}{2} = s - \frac{n(n+1)}{2} = D.$$

Ceci suggère que le fait d'imposer une base de vecteurs minimaux ne réduit pas la complexité de l'algorithme, fait que j'ai constaté expérimentalement en dimensions 5 et 6.

L'utilisation du groupe des \mathcal{F} -équivalences qui stabilisent la forme permet (lorsqu'il n'est pas trivial, c'est-à-dire dans plus de la moitié des cas traités) d'accélérer la recherche des faces (on gagne environ 50% de temps d'exécution du programme). On donne dans l'annexe II un échantillonnage des temps de calculs en fonction du nombre de génératrices du domaine et de l'ordre du groupe des \mathcal{F} -équivalents.

II.6. Résultats

Nous nous sommes bornés dans les exemples ci-dessous à des patchwork de deux réseaux entiers L_1 et L_2 , représentés par leurs matrices de Gram A_1 et A_2 normalisées à la même norme. Nous avons obtenu dans chaque cas la liste complète des réseaux \mathcal{F} -parfaits (qui sont rationnels (II.3.4)) à équivalence près, et donc la constante d'Hermite $\gamma_{\mathcal{F}} = \sup_{L \in \mathcal{F}} \gamma(L)$. Pour le réseau réalisant cette constante (il est en effet unique à isométrie près dans chacun des cas traités), nous précisons une matrice de Gram entière primitive (dont les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble), son déterminant, son minimum μ , le nombre de couples de vecteurs minimaux s , sa constante d'Hermite γ ,

nombre de couples de vecteurs minimaux dans le dual s^* et enfin le carré de la constante d'Hermite duale γ' .

Afin de construire des réseaux denses de norme $\mu = 6$, nous avons souvent choisi l'un des réseaux de départ dans la suite W_i des réseaux de Watson [Wat] de dimension i , $2 \leq i \leq 7$, (les W_i sont des sections de norme 3 de $\sqrt{2}E_7^+$; on a : $W_6 \sim D_6$, $W_5 \sim A_5^2$, $W_3 \sim A_3^2$) renormalisés au besoin.

Nous utilisons aussi les réseaux de racines, et plus généralement les réseaux parfaits, pour lesquels nous adoptons les notations de Conway et Sloane [C-S].

Nous donnons d'abord des exemples de dimensions 5 et 6 pour lesquelles on ne cherche pas à construire des réseaux parfaits (puisque la liste en est déjà connue). On choisit donc l'une des sections non parfaite. Il s'agit en fait d'un réseau de Watson. L'autre est semblable à un réseau de racines A_4 donc de norme paire. On obtient donc des réseaux entiers de normes multiples de 6 qui ne peuvent donc pas être parfaits au sens classique.

II.6.1 Dimension 5 : On choisit d'abord L_1 semblable au réseau critique en dimension 3 A_3 , et L_2 au réseau de Watson W_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On obtient quatre matrices \mathcal{F} -parfaites. La plus dense,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

dont les caractéristiques sont

$$(\det = 1188 \quad s = 16 \quad \gamma = 1.4560 \quad s^* = 1 \quad \mu = 6 \quad \gamma'^2 = 1.2792),$$

appartient au chemin de Voronoï reliant deux matrices de Gram de D_5 le long duquel toutes les matrices ont 16 vecteurs minimaux. Elles ont bien entendu un défaut 1 de perfection, et ce sont les seules à avoir plus de $14 = n(n+1)/2 - 1$ vecteurs minimaux. M_1 est la seule matrice (à équivalence près) de norme 6 sur chemin.

Remarquons que le réseau le moins dense de cette famille est un réseau eutactique de norme 4, qui constitue un contre-exemple de dimension minimale à la question posée par Coxeter [Cox] "*les réseaux eutactiques ayant au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs minimaux sont-ils extrêmes ?*"

La densité de M_1 le situe entre les réseaux parfaits D_5 et A_5^3 : $\gamma(A_5^3) = 1.4459 < \gamma_{\mathcal{F}} = 1.4560 < \gamma_5 = 1.5157$. Par contre, ce réseau (comme les trois autres) est médiocre du point de vue de la dualité ou des automorphismes : $\gamma'^2 = 1.2792$, $|\text{Aut}(M_1)| = 48$, à comparer à $\gamma'^2(D_5) = 2$, $|\text{Aut}(D_5)| = 3840$.

II.6.2 C'est maintenant L_1 qui est semblable à \mathbb{W}_3 (donc à \mathbb{D}_3^*), et L_2 au réseau \mathbb{A}_2 critique en dimension 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Les 5 réseaux \mathcal{F} -parfaits M'_i sont moins denses que les précédents (ils se situent entre les réseaux parfaits \mathbb{A}_5^3 et \mathbb{A}_5 et l'on a : $\gamma_{\mathcal{F}} = 1.4345$. Par contre, ils sont plus intéressants du point de vue de la dualité. En particulier, le réseau le plus dense, de matrice de Gram

$$M'_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

de caractéristiques

$$(\det = 1280 \quad s = 14 \quad \gamma = 1.4345 \quad s^* = 4 \quad \mu = 6 \quad \gamma'^2 = 1.8750),$$

fournit la troisième valeur connue pour γ'^2 : $\gamma'^2(M'_1) < \gamma'^2(L(1)) = 1.9599$, où $L(1)$ est le réseau isodual construit par Conway et Sloane dans [C-S1] (cf. chap. III). Remarquons que ce réseau n'a pas d'autre section parfaite que L_2 , et que son dual n'en a aucune de dimension supérieure à 1.

Il appartient au chemin de Voronoï reliant les réseaux parfaits \mathbb{D}_5 et \mathbb{A}_5^3 , et c'est ici encore le réseau de norme $\mu = 6$.

Dans le but de trouver de nouveaux de norme 3, nous avons aussi étudié la famille \mathcal{F} patchwork du réseau W_4 et du réseau $\sqrt{3}\mathbb{Z}$. On obtient trois réseaux \mathcal{F} -parfaits dont un seul est de norme 3 : il s'agit naturellement du réseau W_5 , mais le plus dense est un réseau de norme 6, à savoir le réseau M'_1 précédent. Le réseau le plus intéressant du point de vue de la dualité est W_5 : rappelons que son dual est semblable au réseau parfait \mathbb{A}_5^3 .

II.6.3 Dimension 6 : on prend L_1 et L_2 semblables respectivement au réseau de racines \mathbb{A}_4 et au réseau de Watson \mathbb{W}_2 , de matrices de Gram

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il y a exactement 11 réseaux \mathcal{F} -parfaits (de norme 6 sauf un, de norme 12). Le plus dense, de matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

est à peine moins dense que $\mathbb{P}_6^2 \sim \mathbb{E}_6^*$: $\gamma_{\mathcal{F}} = \gamma(M_2) = 1.5949 < \gamma(\mathbb{P}_6^2) = 1.6012$. Il appartient encore à un chemin de Voronoï à 28 couples de vecteurs minimaux au-dessus du réseau \mathbb{D}_5 joignant le réseau critique \mathbb{E}_6 à lui-même, et c'est le seul de norme 6.

Le réseau le moins dense du chemin est encore un réseau eutactique de norme 4, autre contre-exemple à la question posée par Coxeter.

Ici encore, on étudie les extensions du réseau de Watson W_5 . On obtient des résultats tout à fait analogues à ceux de II.6.2 : il y a trois extensions \mathcal{F} -parfaites, dont une seule, W_6 , est de norme 3 ($\gamma(W_6) = 1.5$, $s(W_6) = 16$) ; mais la plus dense est un réseau de norme 6 presque parfait ($\gamma_{\mathcal{F}} = 1.516$, $s = 20$). Une étude analogue en dimension 7 donne 4 extensions \mathcal{F} -parfaites de W_6 , mais dont la plus dense est évidemment le réseau de norme 3 $W_7 \sim \mathbb{E}_7^*$ (le second en densité de la liste des réseaux parfaits de rang 7). L'un des autres réseaux est également parfait (de norme 6) : il s'agit du réseau P_7^{12} .

Dans ce qui suit, on cherche plutôt à étendre les listes de réseaux parfaits connus, à partir de réseaux parfaits de rangs inférieurs.

II.6.4 Dimension 8 : Ici, on ajoute en somme directe un réseau parfait de rang 6 avec le réseau plan hexagonal de même norme. On obtient une liste exhaustive de réseaux parfaits de rang 8, tous plus denses que A_8 , ce qui est conforme à la conjecture de Coxeter : " A_n is the least dense perfect lattice in n dimensions". Parmi ces réseaux, 53 n'ont pas de section hyperplane parfaite. Compte tenu des résultats de Laihem, on possède donc maintenant une liste de 1228 réseaux parfaits en dimension 8 qui ont une section parfaite de codimension 1 ou 2.

Le tableau suivant fournit, pour $i = 1, \dots, 7$ le nombre (à isométrie près) de réseaux parfaits dans \mathbb{R}^8 sommes directes du réseau hexagonal (semblable à A_2) et d'un réseau parfait semblable à P_6^i où les P_6^i sont les 7 réseaux parfaits de rang 6 classés par ordre décroissant de densité. On donne aussi le nombre (shp) de formes sans section hyperplane parfaite, la meilleure constante d'Hermite $\gamma_{\mathcal{F}}$ et le nombre maximum s_{max} de couples $(\pm x)$ de vecteurs minimaux, atteints sur \mathbb{E}_8 et deux réseaux construits par Barnes, une extension $g(8, 1)$ du réseau P_7^{26} et le réseau L_8^4 déjà rencontré au chapitre I.

\mathcal{F}	$P_6^1 = \mathbb{E}_6$	$P_6^2 = \mathbb{E}_6^*$	$P_6^3 = \mathbb{D}_6$	P_6^4	P_6^5	P_6^6	$P_6^7 = A_6$
Nombre	5	5	5	71	33	84	≥ 9
shp	2	0	0	19	9	23	≥ 3
$\gamma_{\mathcal{F}}$	2 (\mathbb{E}_6)	1.754 (L_8^4)	2 (\mathbb{E}_6)	1.754 (L_8^4)	1.746 ($g(8, 1)$)	1.754 (L_8^4)	2 (\mathbb{E}_8)
s_{max}	120	54	120	54	54	54	120

Donnons quelques statistiques sur les 53 réseaux sans section hyperplane parfaite. On trouvera dans l'annexe I les principales caractéristiques de ces réseaux.

Tous sont nouveaux sauf le seul réseau de norme 10 figurant dans la liste des contigus de \mathbb{D}_8 obtenue par Jaquet. Ils ne peuvent pas être dans la liste des réseaux de Barnes, qui possèdent tous une section hyperplane parfaite de même norme. Ils sont tous de norme 8 excepté deux de norme 6, cinq de norme 12 et un de norme 10. Seulement 15 sont eutactiques, donc extrêmes. Le plus dense de ces 53 réseaux ($\gamma = 1.7354$), de norme 6, de la forme $\mathbb{E}_6 \oplus A_2$, est aussi celui qui a le plus de vecteurs minimaux ($s = 51$) et le plus d'automorphismes ($g = 144$). Du point de vue de la densité, il se place en

douzième position de la liste de tous les réseaux parfaits connus de rang 8. L'ordre de son groupe d'automorphismes n'est pas très important comparé par exemple au réseau de Barnes L_8^4 qui possède 62208 automorphismes. Plus généralement, les ordres des groupes d'automorphismes des 53 réseaux parfaits valent pour les 5/6-ièmes d'entre eux 2, 4 ou 8.

Du point de vue de la dualité, la meilleure constante d'Hermite duale atteinte sur un réseau au-dessus de A_6 , ($\gamma'^2_{max} = 2.6203$), est plus élevée que celle du réseau D_8 ($\gamma'^2(D_8) = 2$), mais ne dépasse pas celle du réseau L_8^4 ($\gamma'^2(L_8^4) = 2.6666$) qui est la meilleure constante connue, mise à part celle de E_8 qui vaut 4. Le nombre de paires de vecteurs minimaux des duals est inférieur ou égal à 4, ce qui laissait présager de faibles constantes γ' .

Intéressons-nous plus particulièrement aux réseaux au-dessus des trois réseaux de racines E_6 , D_6 , A_6 .

Dans ces trois cas, il y a peu d'extensions ; l'expérience montre que le nombre d'extensions des réseaux P_6^i varie en sens inverse de l'ordre des groupes d'automorphismes des P_6^i . L'étape la plus longue de notre algorithme a ici encore consisté à déterminer les contigus du réseau E_8 à cause du grand nombre de ses vecteurs minimaux (120). Grâce à la remarque de convexité déjà utilisée au chapitre I, on peut éliminer certains vecteurs minimaux pour l'énumération des faces du domaine et donc augmenter la rapidité des calculs ; il a toutefois fallu 20 jours de calculs sur une station SPARC 10 pour déterminer les voisins de E_8 au-dessus de A_6 .

Les réseaux de racines ou liés à ces réseaux que l'on trouve au-dessus de A_6 (resp. D_6 , resp. E_6) sont A_8 , D_8 , A_8^2 et E_8 (resp. D_8 , A_8^2 et E_8 , resp. A_8^2 et E_8).

Autre résultat : On a également construit des réseaux \mathcal{F} -parfaits sommes directes de réseaux semblables à D_4 et au réseau de Watson W_4 respectivement. On a notamment trouvé un réseau parfait de norme 6 avec 47 couples de vecteurs minimaux qui contient un réseau semblable à D_5 mais n'a pas de section parfaite de codimension 1 ou 2 et ne figure donc pas dans les listes précédentes. C'est donc un nouveau réseau à ajouter à la liste des 1228 réseaux parfaits de rang 8.

II.6.5 Dimension 9 et 10 : On ajoute dans ce paragraphe le réseau plan hexagonal à un réseau parfait de rang 7 ou 8.

On obtient alors une liste de réseaux parfaits en dimensions 9 et 10. En particulier, il y a 19 réseaux (resp. 8 et 14) au-dessus de E_7 (resp. E_7^* et E_8).

En dimension 9, les réseaux obtenus par extension de E_7 sont assez denses (cf. tableau I). Cependant, les deux réseaux les plus intéressants du point de vue de la densité, du groupe d'automorphismes et du kissing number sont déjà bien connus : il s'agit des réseaux $B_9^2 \sim \Lambda_9$ et A_9^3 de Barnes. Par contre, les extensions de E_7^* (dont aucune n'est de norme 3) ne sont pas très denses et possèdent au plus 62 vecteurs minimaux.

On a également obtenu une liste d'environ 600 réseaux parfaits de rang 9 de la forme $P_7^6 \oplus A_2$, où P_7^6 est le sixième réseau parfait de rang 7. Leurs caractéristiques n'étant en général pas très intéressantes, nous avons arrêté la recherche. Nous étudions l'un d'eux au chapitre III.

En dimension 10, on ajoute en somme directe les réseaux A_2 et E_8 . On trouve exactement 14 réseaux parfaits dont le réseau laminé Λ_{10} (cf. tableau II).

Dans les tableaux ci-dessous, dans lesquels figurent les 6 réseaux les plus denses au-dessus de E_7 et E_8 , on précise dans la première colonne ceux d'entre eux qui ont déjà été rencontrés comme extensions.

Tableau I
Extensions de E_7

	det	N	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
B_9^2	512	4	(136,1)	10321920	2	2	E
A_9^3	21870	6	(129,1)	725760	1.976	1.8	E
$ext(K_8)$	768	4	(99,3)	18432	1.911	2.666	E
	32076	6	(90,2)	2880	1.894	2.318	E
	33534	6	(88,1)	288	1.885	2.217	N-E
$ext(A_8^2)$	896	4	(91,1)	4608	1.879	2.285	E

Tableau II
Extensions de E_8

	det	N	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
Λ_{10}	768	4	(168,3)	884736	2.058	2.666	E
$ext(A_9^3)$	54675	6	(147,3)	7776	2.015	2.4	E
$ext(\Lambda_9)$	960	4	(154,2)	322560	2.012	2.133	E
$ext(A_9^3)$	3400690959	18	(141,1)	1440	2.005	2.227	N-E
$ext(A_9^3)$	59533056	12	(141,2)	288	2.003	2.257	N-E
	61236	6	(141,2)	17280	1.992	2.142	E

Chapitre III

Algorithme de Voronoï et problèmes de dualité

En parcourant des chemins (stables par dualité ou à automorphisme imposé) joignant deux réseaux parfaits contigus, on construit des réseaux isoduaux (ou à constante duale élevée) en dimensions 3, 5, 6, 7 et 9.

III.1. Introduction et notations

Dans la première partie de ce chapitre, nous utilisons l'algorithme de Voronoï pour la recherche de réseaux "presque" parfaits isoduaux, c'est-à-dire isométriques à leurs duals. Motivés par des questions de géométrie Riemannienne, Conway et Sloane ont introduit dans [C-S1] ce type de réseaux, et les ont étudiés du point de vue de la densité. L'algorithme de Voronoï ou une de ses variantes, introduit naturellement des chemins linéaires joignant, dans l'espace des réseaux, deux réseaux parfaits, éventuellement au sens large. L'un des intérêts de ces chemins, c'est que l'on y rencontre des réseaux à grand kissing number ($s \geq n(n+1)/2 - 1$), constant tout le long du chemin. Il est naturel pour la recherche de réseaux isoduaux, où plus généralement semblables à leurs duals, de se limiter à des chemins de Voronoï stables par dualité. Plus correctement, il s'agit de chemins dans l'espace des matrices symétriques joignant deux matrices parfaites contiguës, et qui sont stables par inversion modulo normalisation et équivalence. Pour assurer cette condition dans la pratique, on leur impose de contenir (à similitude près) un couple de réseaux duals. Par exemple, les réseaux parfaits A_2 et A_2^* (qui sont semblables) sont contigus, de même que les réseaux D_4 et D_4^* (eux aussi semblables), que les réseaux E_6 et E_6^* , et que E_7 et E_7^* .

Dans les cas des dimensions 2 et 4 évoqués ci-dessus, tous les réseaux du chemin sont (après normalisation) isoduaux. Par contre, sur les chemins reliant E_6 et E_6^* (resp. E_7 et E_7^*), nous avons trouvé un seul réseau isodual, le plus dense connu en dimension 6 (resp. 7), réseau construit par Conway et Sloane (par "collage" de réseaux de racines, cf. [C-S1]).

Conway et Sloane ont également construit par "collage" les réseaux isoduaux de densité record en dimensions 3 et 5, mais ces réseaux ne possèdent pas assez de vecteurs minimaux pour pouvoir appartenir à un chemin de Voronoï au sens classique. Nous les trouvons ci-dessous sur un "raccourci" joignant encore deux réseaux parfaits. Enfin, nous montrons que le réseau de dimension 9 construit par Conway et Sloane n'est pas extrême parmi les isoduaux, et nous construisons un chemin d'isoduaux tous plus denses.

Précisons la notion d'isodualité (cf. [B-M1]). Un réseau L est dit σ -isodual s'il existe une transformation orthogonale σ de E telle que $\sigma(L) = L^*$ (ou $\sigma(L^*) = L$), en particulier,

il est dit orthogonal (resp. symplectique) s'il existe une telle isométrie σ avec $\sigma^2 = id$ (resp. $\sigma^2 = -id$, ce qui exige n pair). Un réseau σ -isodual est dit σ -extrême s'il réalise un maximum local de densité sur l'ensemble des réseaux σ -isoduaux. Nous avons vérifié que les réseaux isoduaux que nous construisons sont orthogonaux (et symplectiques dans le cas pair), et σ -extrêmes. (Dans le cas $n = 3$, Conway et Sloane ont montré que le réseau *ccc* est le plus dense des réseaux isoduaux de dimension 3.) Par contre, dans chaque cas, nous prouvons qu'ils réalisent le minimum de la constante γ' sur leur chemin.

Nous adoptons dans la pratique le point de vue matriciel. Dans chaque cas, on construit une famille de matrices symétriques définies positives de même norme, à un paramètre t :

$$A_t = A + tB, \quad t \in I =]a, b[,$$

pour laquelle il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout $t \in I$, alors ${}^t P A_t {}^{-1} P$ soit proportionnelle à une matrice A_{t^*} de la famille. La recherche du réseau isodual consiste alors à chercher une valeur de t telle que $t = t^*$.

III.2. Cas des dimensions 6 et 7.

III.2.1. Étude du chemin de Voronoï reliant \mathbb{E}_6 à \mathbb{E}_6^* .

Dans tout ce qui suit, on utilise l'algorithme de Voronoï à base de vecteurs minimaux imposée (cf. second chapitre).

On lance l'algorithme à partir d'une matrice de Gram A (normalisée à 4) du réseau de racines \mathbb{E}_6 , et on l'arrête dès que l'on trouve l'unique orbite de faces (modulo l'équivalence classique) conduisant à une matrice de Gram d'un réseau semblable à \mathbb{E}_6^* .

Soit B un vecteur de cette face, c'est-à-dire un représentant de l'orthogonal de la face. On étudie ici le *chemin de Voronoï* à un paramètre défini par $A + tB$ où t décrit la droite réelle. On obtient alors la matrice A_t dépendant du paramètre t définie par :

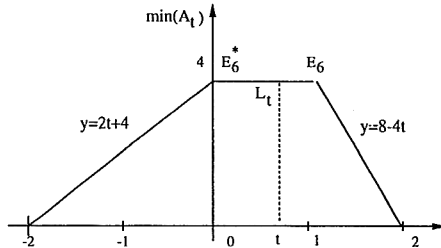
$$A_t = A + tB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -t & t & 2 & 2 & 2 \\ -t & 4 & 2 & -t+2 & -t+2 & -t+2 \\ t & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -t+2 & 2 & 4 & -t+2 & -t+2 \\ 2 & -t+2 & 2 & -t+2 & 4 & -t+2 \\ 2 & -t+2 & 2 & -t+2 & -t+2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit L_t , le réseau associé à la matrice de Gram A_t (lorsqu'il existe, il est unique à isométries près).

Par construction, le minimum de la matrice $A_t = A + tB$ reste constant ($\min(A_t) = 4$) lorsque $t > 0$ est "assez petit", et pour les valeurs $t = 0$ et $t = 1$, on obtient les deux matrices parfaites A_0 et A_1 correspondant aux réseaux de racines $L_0 \sim E_6$ et à son dual $L_1 \sim E_6^*$.

Le déterminant du réseau L_t associé à la matrice de Gram A_t vaut $3(t-2)^2(t+2)^4$, ce qui prouve que la matrice n'est plus définie positive lorsque $|t| \geq 2$. On montre alors que si t appartient à $] -2, 0[$ (resp. $]1, 2[$), le minimum de la matrice A_t décroît linéairement suivant t selon le graphe ci-dessous.



Lemme 2.1.1 : Soit L_t un réseau associé à la matrice de Gram A_t , alors le dual L_t^* est semblable à L_{t^*} avec $t^* = \frac{4t-4}{t-4}$.

Démonstration : Il suffit de vérifier matriciellement la relation ${}^tP(A_t^{-1})P = \frac{t-4}{6(t^2-4)}A_{\frac{4t-4}{t-4}}$, où P est la matrice d'équivalence suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_6(\mathbb{Z}).$$

On vient donc de montrer que la dualité $t \mapsto t^*$ conserve le segment $[0, 1]$ et échange les intervalles $] -2, 0[$ et $]0, 2[$. L_t^* est isométrique à $k(t)L_{t^*}$, avec $k(t) = \sqrt{\frac{t-4}{6(t^2-4)}}$.

Or, il n'existe qu'une valeur $t_0 \in] -2, 2[$ telle que $t = \frac{4t-4}{t-4}$ ($t_0 = 2(2 - \sqrt{3})$) pour laquelle L_{t_0} est semblable à $L_{t_0}^*$. En renormalisant L_{t_0} de façon qu'il ait même norme que son dual, on obtient un réseau isodual de rang 6, de norme $4k(t_0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, défini sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Comme tous les réseaux représentés par les matrices A_t , $0 < t < 1$, il possède 24 couples de vecteurs minimaux. Ce réseau figure dans l'article de Conway et Sloane sous le nom de $M(E_6)$, et il a une interprétation en géométrie riemannienne : J.R. Quine a montré

qu'il s'agit de la jacobienne d'une courbe de Picard de genre 3. Il a également prouvé, avec P.L. Zhang, que ce réseau est symplectique-extrême.

Soit β une base de L_{t_0} telle que $\text{Gram}(\beta) = A_{t_0}$. La transformation σ représentée par P dans les bases β et β^* est du type symplectique. En effet, il suffit de vérifier que $\sigma^2 = -Id$, c'est-à-dire, matriciellement :

$$(A_{t_0}^{-1}P)^2 = -I_6,$$

où $A_{t_0}^{-1}P$ est la matrice de σ dans les bases (β, β) .

Étudions la constante d'Hermite duale γ' sur un tel chemin.

Proposition III.2.1.2. *Sur un chemin de Voronoï stable par dualité, il existe au plus un réseau σ -isodual σ -extrême (avec $\sigma^2 = \pm Id$), et ce réseau réalise le minimum de la constante γ' sur le chemin.*

Démonstration :

Soit L un réseau σ -extrême, c'est-à-dire qu'il réalise un maximum local de la constante d'Hermite sur l'ensemble des réseaux σ -isoduaux. Un tel réseau doit vérifier une condition d'eutaxie relative à σ (cf. [B-M1]) : il existe des coefficients $\rho_x > 0$ tels que

$$\sum_{x \in S(L)} \rho_x (p_x - p_{\sigma(x)}) = 0,$$

où les p_x sont les projections orthogonales sur les droites $\mathbb{R}x$. Une telle relation s'écrit aussi :

$$\sum_{x \in S(L)} \rho_x p_x = \sum_{x \in S(L)} \rho_x p_{\sigma(x)},$$

où le vecteur $\sigma(x)$ décrit $S(L^*)$ lorsque x décrit $S(L)$. La relation précédente est donc un cas particulier de la relation de dual-eutaxie (cf. [B-M2]).

Par ailleurs, tout le long du chemin de Voronoï, les matrices de Gram A_t ont même ensemble de vecteurs minimaux S ; la stabilité de ce chemin par dualité fait que l'ensemble S^* des vecteurs minimaux de leurs matrices inverses ne dépend pas non plus de t . Ce chemin est donc contenu dans une "classe au sens dual" telle qu'elle est définie dans [Ber], classe qui contient, à similitude près, au plus un réseau dual-eutactique (car S engendre \mathbb{R}^n), sur lequel la constante γ' atteint son minimum.

Revenant à l'exemple précédent, nous notons que le réseau isodual n'est pas eutactique. L'unique réseau eutactique (à isométrie près) sur le chemin $\{L_t, 0 < t < 1\}$ correspond à la valeur $t = 2/3$, et réalise naturellement (cf. [B-M1]) un minimum de densité sur ce chemin : $\gamma(L_{2/3}) = 1.573 < \gamma(L_{t_0}) = 1.577 < \gamma(\mathbb{E}_6^*) = 1.601 < \gamma(\mathbb{E}_6) = 1.665$ (les valeurs de γ' sont $\gamma'(L_{t_0}) = 1.577 < \gamma'(L_{2/3}) = 1.581 < \gamma'(\mathbb{E}_6^*) = \gamma'(\mathbb{E}_6) = 1.632$).

III.2.2. Étude du chemin de Voronoï reliant \mathbb{E}_7 à \mathbb{E}_7^* .

On effectue en dimension 7 un travail similaire à celui du paragraphe précédent pour déterminer un réseau semblable à son dual.

Pour obtenir une paramétrisation du chemin, on applique l'algorithme de Voronoï dans le cas où une base de vecteurs minimaux est imposée en partant d'une matrice de Gram de \mathbb{E}_7^* (dont le domaine de Voronoï est très facile à déterminer) et l'on obtient une famille de matrices A_t dépendante du paramètre t :

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2t & -2t & 2t & -t+1 & -t+1 & -t+1 \\ 2t & 2 & 2t & -t+1 & 2t & 2t & 2t \\ -2t & 2t & 2 & t-1 & -t+1 & -t+1 & -t+1 \\ 2t & -t+1 & t-1 & 2 & 2t & 2t & 2t \\ -t+1 & 2t & -t+1 & 2t & 2 & -t+1 & -t+1 \\ -t+1 & 2t & -t+1 & 2t & -t+1 & 2 & -t+1 \\ -t+1 & 2t & -t+1 & 2t & -t+1 & -t+1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t \in]-1, 1/2[,$$

(le déterminant de cette matrice est $-2(2t-1)(t+1)^6$). Par construction les matrices A_0 et $A_{1/3}$ correspondent aux réseaux \mathbb{E}_7 et \mathbb{E}_7^* . On vérifie aisément que l'on a :

$${}^tP(A_t^{-1})P = \frac{1}{2} \frac{-5t+3}{-4t^2-2t+2} A_{\frac{1-3t}{3-5t}}$$

où P est définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vient donc de prouver qu'un réseau L_t correspondant à la matrice A_t possède un dual semblable au réseau $L_{\frac{1-3t}{3-5t}}$. La valeur pour laquelle le réseau L_t est semblable à son dual est $t_0 = 1/5$.

$$5/2A_{t_0} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ce réseau rationnel possède 27 couples de vecteurs minimaux et réalise la meilleure constante d'Hermite connue parmi les réseaux isoduaux. Il est de type orthogonal, bien que la transformation σ définie ci-dessus par la matrice P ne soit pas une symétrie. Or, le sous-groupe des transformations changeant $L_{1/5}$ en son dual est $\sigma.G = \{\sigma g, g \in G\}$ où

G est le groupe d'automorphismes du réseau $L_{\frac{1}{3}}$. La transformation $\sigma' \in \sigma.G$ représentée dans les bases β et β^* par la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vérifie la relation d'orthogonalité : $\sigma'^2 = Id$.

$$(A_{\frac{1}{3}}^{-1} * P')^2 = I = Mat(id, \beta, \beta).$$

On vérifie alors la σ' -extrémalité et notamment la σ' -eutaxie : on trouve des coefficients égaux (tout le long du chemin le groupe d'automorphismes est d'ordre $g = 2^8 3^4 5$, d'indice 28 dans celui du réseau \mathbb{E}_7). D'après la proposition III.2.1.2, ce réseau réalise un minimum de la constante γ' sur le chemin ($\gamma' = \gamma = 5/3$). Il n'est donc pas dual-parfait (la dual-perfection, notion introduite dans [B-M2], signifie que les projections sur les vecteurs minimaux du réseau et ceux de son dual engendrent l'espace $\text{End}_s(E)$) : tout le long du chemin, les projections sur les vecteurs minimaux du réseau L_t engendrent un hyperplan de l'espace, de même que celles relatives à son dual, et ces deux hyperplans viennent se confondre lorsque L_t est isodual. C'est le seul réseau non dual-parfait du chemin. On retrouve le même phénomène pour le réseau isodual de rang 6.

III.3. Étude de la dimension 5.

Dans ce paragraphe, le problème est différent de celui des dimensions 6 et 7. En effet, on vérifie qu'il n'existe pas de chemin de Voronoï reliant un réseau parfait à son dual. Cependant, en considérant un "raccourci" de deux chemins Voronoï consécutifs, on obtient un chemin à un paramètre stable par dualité.

Donnons ci-dessous la construction d'un tel chemin.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

une matrice de Gram du réseau \mathbb{D}_5 , renormalisé à la norme 4. Le domaine de Voronoï de A possède exactement 4 classes d'équivalences de faces. (Deux classes différentes (l'une à 14 vecteurs minimaux, l'autre à 16) conduisent à une matrice de Gram de \mathbb{D}_5 , et les deux autres classes à des matrices de Gram de \mathbb{A}_5^3 et \mathbb{A}_5 .)

Comme dans les exemples précédents, on obtient une paramétrisation du chemin reliant \mathbb{D}_5 à \mathbb{A}_5^3 en appliquant l'algorithme de Voronoï à la matrice de Gram A du réseau \mathbb{D}_5 , et

on stoppe la recherche des faces lorsque l'on a trouvé un représentant de l'unique orbite de face conduisant à A_5^3 (soit B la matrice de Gram obtenue).

On considère maintenant le chemin de Voronoï reliant la matrice de Gram A avec une autre matrice de Gram C du réseau \mathbb{D}_5 par une face à 16 vecteurs minimaux (cf. II.6.1).

Ces deux chemins de Voronoï ne sont pas stables par dualité. Par contre, si l'on considère le "raccourci" reliant les deux matrices B et C , on obtient un chemin à un paramètre qui n'est pas un chemin de Voronoï, mais qui est stable par dualité.

Donnons ci-dessous une paramétrisation de ce chemin :

$$A_t = C + t * (B - C) = \begin{pmatrix} 4 & 2t & -t+2 & 2t & t-2 \\ 2t & 4 & t-2 & -t+2 & -2t \\ -t+2 & t-2 & 4 & t-2 & t-2 \\ 2t & -t+2 & t-2 & 4 & -t+2 \\ t-2 & -2t & t-2 & -t+2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A_0 = C$, $A_1 = B$. Le déterminant de cette matrice est $-2(3t-4)(t+2)^4$; la matrice A_t est définie positive lorsque $t \in]-2, 4/3[$, et on vérifie que l'on a :

$${}^tP(A_t)^{-1}P = \frac{7t-10}{8(3t^2+2t-8)} A_{\frac{10t-12}{7t-10}},$$

où P est la matrice de $GL_5(\mathbb{Z})$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un réseau L_t défini par la matrice A_t ($t \in]-2, 4/3[$) possède donc un dual semblable au réseau L_{t^*} , avec $t^* = \frac{10t-12}{7t-10}$. On obtient alors un réseau semblable à son dual pour la racine de l'équation $t = t^*$ appartenant à $] -2, 4/3[$: $t_0 = \frac{6}{7}$. La matrice de Gram rendue entière est

$$\frac{7}{4}A_{t_0} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Le réseau isodual correspondant est de norme $4/5$. Il est de type σ -orthogonal pour l'endomorphisme σ associé à P , et réalise un maximum local de densité parmi les réseaux σ -isoduaux. Ici encore, les coefficients de σ -eutaxie sont tous égaux.

La dualité $t \leftrightarrow t^*$ échange les intervalles $\{-2, 6/7\}$ et $\{4/3, 6/7\}$. Le dual de \mathbb{D}_5 correspond à $t = 6/5$, ce qui place sa matrice à l'extérieur du chemin de Voronoï (sur lequel $s = 5$). Par contre le dual A_5^2 de A_5^3 est semblable à la matrice $A_{2/3}$ qui appartient au chemin proprement dit.

Les matrices A_t pour $t \in]0, 1[$ ont le même ensemble S de vecteurs minimaux à 10 éléments. Elles ont aussi le même groupe d'automorphismes d'ordre 240. En particulier, elles sont invariantes sous l'action d'une matrice Q d'ordre 5. L'ensemble de matrices M telles que ${}^tQMQ = M$ dépend linéairement de trois paramètres. A.M. Bergé, J. Martinet et F. Sigrist ont mis au point un algorithme à groupe d'automorphismes G donné (cf. [B-M-S]). Dans le cas d'un groupe d'ordre 5, ils ont montré que la matrice C de \mathbb{D}_5 a 3 G -contiguës dont deux sont des matrices de Gram de A_5 , et la troisième représente le réseau A_5^3 . Le chemin de G -contiguïté reliant les matrices de \mathbb{D}_5 et A_5^3 est précisément le segment $\{A_t, t \in]0, 1[\}$ que nous avons pris comme "raccourci" entre B et C . C'est cette méthode à groupe d'automorphismes imposé que nous allons utiliser dans les exemples suivants.

III.4. Étude de la dimension 3.

Soient G un groupe cyclique d'ordre 4, σ un de ses générateurs et soit la représentation ρ de rang 3 définie par

$$\rho(\sigma) = Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre 3 $\mathcal{T} = \{M, {}^tQMQ = M\}$. C'est l'espace vectoriel des matrices

$$\begin{pmatrix} x & y & -x-2y \\ y & x & y \\ -x-2y & y & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Lorsqu'elles sont définies positives, elles représentent les G -réseaux, c'est-à-dire les réseaux de E stables sous l'action du groupe $G \subset O(E)$, et qui sont des $\mathbb{Z}[G]$ -modules libres.

Lorsque l'on impose un minimum 2 à ces matrices, on obtient la famille

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & -2t-2 \\ t & 2 & t \\ -2t-2 & t & 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, -1/2],$$

où A_{-1} représente le réseau parfait A_3 et $A_{-1/2}$ le réseau le moins dense de la classe fragile à 5 vecteurs minimaux cité dans [C-S1]. Lorsque l'on applique l'algorithme de G -Voronoi à partir de la matrice A_{-1} , on obtient dans l'espace \mathcal{T} un domaine à deux faces dont l'une est une impasse (le vecteur de face est une matrice positive), et l'autre face conduit au chemin ci-dessus.

Dans l'intervalle ouvert $]-1, -1/2[$, les matrices ont le même ensemble de vecteurs minimaux constituant une orbite à 4 éléments sous l'action de Q . Les matrices correspondant à $t = -1$ ou $t = -1/2$ ont une deuxième orbite de vecteurs minimaux. Il s'agit donc d'un chemin de G -Voronoi au sens de [B-M-S]. En fait, les matrices A_t sont définies positives pour $t \in]-2, 0[$, et on constate que l'on a la relation

$${}^tPA_t^{-1}P = k(t)A_t^*,$$

avec $k(t) = 2 \frac{4t^2+8t}{t-2}$ et $t^* = \frac{2t+4}{t-2}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette dualité échange la matrice parfaite A_{-1} avec la matrice $A_{-2/3}$ et conserve globalement le segment correspondant à l'intervalle $[-1, -2/3]$ (elle échange les intervalles $] -2/3, 0[$ et $] -2, -1[$). Sur l'intervalle $[-1, -2/3]$, l'équation $t = t^*$ a une unique solution $t_0 = 2 - 2\sqrt{2}$ qui correspond (après normalisation) à un réseau isodual de norme $2(\sqrt{k(t_0)}) = 1/2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. On reconnaît le réseau *ccc* de Conway et Sloane qui réalise le maximum absolu de la constante d'Hermite des réseaux isoduaux de dimension 3.

III.5. Étude de la dimension 9.

III.5.1. Un chemin intéressant du point de vue de la dualité.

Le réseau extrême A_9^5 de Coxeter est intéressant du point de vue de la dualité. Il a 45 vecteurs minimaux ainsi que son dual $\sim A_9^2$, et il réalise le maximum de la constante d'Hermite duale $\gamma' = \sqrt{16/5}$. À isométrie près, il a un seul contigu dont les caractéristiques sont : $\mu = 10$, $s = 45$, $s^* = 16$, $\gamma = 1.779$, $\gamma' = 1.755$. Son groupe d'automorphismes est d'indice 45 dans celui de A_9^5 . Le chemin les joignant ne peut pas être stable par dualité puisqu'il ne contient pas le réseau A_9^2 (en effet, ce réseau est parfait et il serait donc le contigu de A_9^5). D'ailleurs, tout le long du chemin ouvert, on a $s = 44 \neq s^* = 16$, ce qui exclut la présence d'un réseau isodual. Par contre, nous allons trouver un chemin joignant A_9^5 à un autre réseau parfait, et tout le long duquel on aura $s = s^* = 40$. Pour cela, on utilise l'algorithme de Voronoï pour le groupe cyclique d'ordre 10 et sa représentation d'augmentation de degré 9.

Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_9(\mathbb{Z})$$

l'image d'un générateur par la représentation d'augmentation, et soit

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & x & e & d & c \\ b & a & b & c & d & e & x & e & d \\ c & b & a & b & c & d & e & x & e \\ d & c & b & a & b & c & d & e & x \\ e & d & c & b & a & b & c & d & e \\ x & e & d & c & b & a & b & c & d \\ e & x & e & d & c & b & a & b & c \\ d & e & x & e & d & c & b & a & b \\ c & d & e & x & e & d & c & b & a \end{pmatrix} \right\}, \text{ avec } x = -a - 2b - 2c - 2d - 2e$$

l'espace des matrices invariantes par P .

Si l'on applique l'algorithme de G -Voronoi à partir d'une représentation dans T du réseau A_9^3 ($a = 8, b = d = e = x = -2, c = 3$) on obtient, à équivalence près, trois contiguës parfaites. Les deux premières, à 70 couples de vecteurs minimaux, sont peu intéressantes du point de vue de la dualité et sont comparables à celles que nous avons construites dans les deux premiers chapitres. Le long du troisième chemin de contiguïté,

$$A_t = \begin{pmatrix} 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 & -t+3 \\ -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 \\ -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 \\ 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 \\ -2t-2 & 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 & -2t-2 \\ 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 & 2t-2 \\ -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 & -t+3 \\ 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 & -2t-2 \\ -t+3 & 2t-2 & -2t-2 & 6t-2 & -2t-2 & 2t-2 & -t+3 & -2t-2 & 8 \end{pmatrix} \quad t \in]0, 1/3[$$

on a constamment $s = s^* = 40$ (plus précisément, l'ensemble S des vecteurs minimaux des matrices est constant, et constitué de 4 orbites à 10 éléments, de même que l'ensemble S^* des vecteurs minimaux des matrices inverses). Malgré les apparences, ce chemin n'est pas stable par dualité. De plus, nous avons montré qu'il n'existe pas, sur ce chemin, de matrice ayant la même densité que son inverse.

Cependant, la contiguë G -parfaite $A_{1/3}$ correspondante présente une propriété remarquable : elle réalise, *ex-aequo* avec l'autre extrémité du chemin, la meilleure valeur connue à ce jour ($\sqrt{16/5}$) de l'invariant d'Hermite dual. Plus généralement, on a, le long du chemin,

$$\gamma'^2 = 16/5 \frac{t+5}{(t+1)(5-3t)},$$

qui atteint son minimum (3.149) pour $t = \frac{-15+4\sqrt{15}}{3}$, valeur supérieure à toutes celles que nous avons trouvées dans les chapitres précédents. La contiguë $A_{1/3}$, de norme 6, est extrême au sens classique ; son inverse qui a 40 vecteurs minimaux ne peut pas être parfaite ($n(n+1)/2 = 45$), elle n'est pas non plus eutactique. Nous avons toutefois vérifié la dual-eutaxie de ce couple de matrices (comme nous l'avons fait pour K'_9 au premier chapitre), qui sont donc dual-extrêmes. Les G -contiguës de la matrice $A_{1/3}$ sont presque parfaites (le défaut de perfection est égal à 1, bien qu'elles aient 45 couples de vecteurs minimaux) et ne présentent pas d'intérêt particulier vis-à-vis de la dualité.

III.5.2. Réseaux isoduaux.

Conway et Sloane, (dans [C-S1]), contruisent par "collage" un réseau isodual de rang 9. Il possède 21 couples de vecteurs minimaux et sa constante d'Hermite leur semble faible ("probably weak") ($\gamma = 1.7142$). Nous construisons, dans ce paragraphe, une matrice de Gram de ce réseau, et nous montrons qu'il ne réalise pas un maximum local de la constante d'Hermite parmi les isoduaux orthogonaux. Enfin, à partir de ce réseau isodual, on construit un chemin (non linéaire) de réseaux isoduaux tous plus denses.

Conway et Sloane considèrent le sous-réseau du réseau cubique de rang 4 orthogonal au vecteur $(2, 1, 1, \dots, 1)$, dont une matrice de Gram est :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En “collant” ce réseau au réseau A_6 , on obtient un réseau isodual ayant la matrice de Gram suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -5 & -5 & 4 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & 12 & -2 & -2 & -4 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -5 & -2 & 12 & 5 & 3 & -5 & 5 & 5 & 5 \\ -5 & -2 & 5 & 12 & -4 & -5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 3 & -4 & 13 & -3 & -4 & -4 & -4 \\ 5 & 2 & -5 & -5 & -3 & 12 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -2 & 5 & 5 & -4 & -5 & 12 & 5 & 5 \\ -5 & -2 & 5 & 5 & -4 & -5 & 5 & 12 & 5 \\ -5 & -2 & 5 & 5 & -4 & -5 & 5 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Soit une base β de E telle que $\text{Gram}(\beta) = A$, alors on vérifie facilement la σ -isodualité où σ a pour matrice dans les bases (β, β^*) :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans [B-M1], on paramètre les réseaux σ -isoduaux grâce au sous-espace

$$\mathcal{A} = \{v \in \text{End}_s(E), v \circ \sigma = -\sigma \circ v\}$$

des endomorphismes anticommuntant avec σ .

La composante connexe des réseaux σ -isoduaux correspondant à $CS9$ est alors :

$$\{e^v(CS9), v \in \mathcal{A}\}.$$

Ici, les valeurs propres $+1$ et -1 de σ étant d'ordres respectifs 4 et 5, l'espace \mathcal{A} est de dimension 20 ; sa traduction matricielle est :

$$T = \{M, {}^t P A^{-1} M A^{-1} P = -M\}.$$

La matrice A n'est pas T -parfaite (son défaut de perfection est de 4). Ceci confirme la remarque dans Conway et Sloane (“probably weak”) : le réseau $CS9$ n'est donc pas extrême parmi les réseaux σ -isoduaux.

Il est alors aisé de construire des familles (non linéaires) de réseaux σ -isoduaux à un paramètre dans lesquelles $CS9$ soit le moins dense : par exemple, prenons v tel que :

$$v^3 = v ;$$

on obtient alors :

$$\begin{cases} e^{tv} = Id + sh(t).v + (ch(t) - 1).v^2 \\ \quad = Id + \frac{\theta^2 - 1}{2\theta}v + \frac{\theta^2 - 2\theta + 1}{2\theta}v^2 \end{cases} \quad \text{avec } \theta = e^t.$$

Si, de plus, on choisit v tel que

$$\begin{cases} Tr(v \circ p_x) = 0 \quad \forall x \in S(CS9) \\ Tr(v^2 \circ p_x) > 0 \quad \forall x \in S(CS9) \end{cases},$$

alors la constante d'Hermite du réseau isodual $e^{tv}(CS9)$ croît lorsque t est assez petit.

Prenons par exemple v ayant pour matrice V dans les bases (β, β^*) :

$$V = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -10 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -10 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors un chemin de réseaux isoduaux L_t ($t \in [-t_0, t_0]$) tous plus denses que le réseau $CS9$. Le réseau le plus dense, L_{t_0} , est défini sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3823})$, ne possède que 4 couples de vecteurs minimaux mais sa constante d'Hermite vaut $1.714343 > \gamma(CS9) = 1.714285$.

Annexe I

Les 52 réseaux de rang 8 sans section hyperplane parfaite de même norme.

det	N	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
20412	6	(51,2)	144	1.735	2.142	E
20736	6	(51,3)	96	1.732	2.250	E
223488	8	(42,1)	8	1.715	2.597	E
228352	8	(41,2)	48	1.711	2.345	E
232128	8	(41,2)	32	1.707	2.511	E
5996025	12	(39,2)	32	1.705	2.617	E
6200388	12	(37,1)	8	1.698	2.556	N-E
243984	8	(41,2)	4	1.696	2.433	N-E
244608	8	(39,1)	4	1.696	2.467	N-E
250752	8	(40,1)	4	1.691	2.367	N-E
250896	8	(39,1)	4	1.691	2.323	E
251136	8	(40,2)	8	1.690	2.363	N-E
251472	8	(39,4)	16	1.690	2.620	N-E
254736	8	(40,1)	2	1.687	2.330	N-E
255248	8	(39,2)	2	1.687	2.438	E
255744	8	(38,1)	8	1.687	2.270	N-E
257472	8	(39,1)	4	1.685	2.305	N-E
257808	8	(39,1)	2	1.685	2.302	N-E
6648480	12	(37,4)	16	1.684	2.451	N-E
259776	8	(39,2)	8	1.683	2.484	N-E
259776	8	(39,2)	4	1.683	2.444	E
262848	8	(39,1)	4	1.681	2.258	N-E
262976	8	(38,2)	4	1.681	2.536	E
6810804	12	(36,1)	4	1.678	2.562	N-E
267792	8	(38,1)	2	1.677	2.435	N-E
267648	8	(38,1)	2	1.677	2.257	N-E

det	N	(s, s^*)	$ Aut $	γ	γ'^2	Extr
267024	8	(38,1)	2	1.677	2.395	E
267648	8	(38,2)	4	1.677	2.462	E
6858432	12	(37,3)	12	1.677	2.507	E
269136	8	(37,1)	2	1.676	2.443	N-E
268944	8	(37,1)	2	1.676	2.467	E
269568	8	(38,1)	2	1.675	2.241	N-E
271872	8	(39,1)	32	1.674	2.135	E
272016	8	(38,1)	2	1.674	2.182	N-E
272784	8	(38,1)	2	1.673	2.176	N-E
272384	8	(37,2)	4	1.673	2.486	N-E
273408	8	(37,1)	2	1.672	2.209	N-E
275520	8	(37,1)	2	1.671	2.342	N-E
275520	8	(37,1)	2	1.671	2.342	N-E
275968	8	(37,2)	4	1.671	2.500	N-E
275072	8	(36,1)	4	1.671	2.462	N-E
276240	8	(38,1)	2	1.670	2.149	N-E
281424	8	(37,2)	4	1.666	2.293	N-E
281424	8	(37,1)	2	1.666	2.293	N-E
282384	8	(36,1)	2	1.666	2.351	N-E
284480	8	(36,1)	4	1.664	2.381	N-E
285696	8	(36,1)	2	1.663	2.328	N-E
289536	8	(36,2)	2	1.661	2.316	N-E
289296	8	(36,1)	2	1.661	2.231	N-E
289296	8	(36,1)	2	1.661	2.231	N-E
299136	8	(36,1)	2	1.654	2.157	N-E
299136	8	(36,1)	2	1.654	2.157	N-E

Annexe II

Échantillon des temps de calculs.

Nbre vm	Nbre auto	Nbre face	CPU
12	2	10	1
12	4	5	0.9
12	8	3	0.6
12	96	1	0.6
13	1	24	6
13	2	12	3
14	1	32	48
14	2	13	6
15	1	15	33
15	2	19	91
16	1	17	76
16	2	19	262
16	4	15	127
16	32	9	33
17	1	16	461
17	2	13	168
17	4	16	188

Nbre vm	Nbre auto	Nbre face	CPU
17	8	10	128
18	1	17	397
18	2	27	1072
19	1	43	3378
19	2	46	790
21	1	140	6610
21	2	16	4090
22	1	44	23986
22	2	64	17043
22	4	24	2603
24	1	145	115674
24	4	24	8717
24	8	46	23182
25	1	86	171616
27	1	64	176753
27	2	65	262879
30	4	70	290500
30	2	217	1134635

BIBLIOGRAPHIE

- [Bar1] E.S. Barnes, *The perfect and extreme senary forms*, Canad. J. Math. 9 (1957), 235–242.
- [Bar2] E.S. Barnes, *The complete enumeration of extreme senary forms*, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), 249 (1957), 461–506.
- [Bar3] E.S. Barnes, *The construction of perfect and extreme forms I, II*, Acta Arith. 5 (1959), 57–79, 461–506.
- [Ber] A.-M. Bergé, *Minimal vectors of pairs of dual lattices*, J. Number Theory 52 (1995), 284–298.
- [B-M1] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Densité dans des familles de réseaux. Application aux réseaux isoduaux*, à paraître.
- [B-M2] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres*, J. Number Theory 32 (1989), 14–42.
- [B-M-S] A.-M. Bergé, J. Martinet, F. Sigrist, *Une généralisation de l'algorithme de Voronoï*, Astérisque 209 (1992), 137–158.
- [Cas] J.W.S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, 99 (1959).
- [C-S] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Low-dimensional lattices. III. Perfect forms*, Proc. Royal Soc. London A 418 (1988), 43–80.
- [C-S1] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *On lattices equivalent to their duals.*, J. Number Theory (1994), 373–382.
- [C-S2] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, Lattices and groups*, Springer-Verlag (1988).
- [Cox] H.S.M. Coxeter, *Extreme forms*, Canad. J. Math. 3 (1951), 391–441.
- [Ja] D.-O. Jaquet, *Thèse, Neuchâtel*, 1991.
- [Ja1] D.-O. Jaquet, *Description des voisins de E_7, D_7, D_8, D_9* , Sémin. Th. Nombres de Bordeaux 4 (1992), 275–283.
- [Ja2] D.-O. Jaquet, *Domaines de Voronoï et algorithme de réduction des formes quadratiques définies positives*, Sémin. Th. Nombres de Bordeaux 2 (1990), 163–215.
- [Ja-S] D.-O. Jaquet, F. Sigrist, *Formes quadratiques contiguës à D_7* , C. R. Acad. Sc. Paris A 309 (1989), 641–644.
- [K-Z] A. Korkine, G. Zolotareff, *Sur les formes quadratiques positives*, Math. Ann. 11 (1877), 242–292.
- [Lai] M. Laihém, *Thèse, Bordeaux*, 1992.
- [Mar] J. Martinet, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens* (à paraître).
- [Q-Z] J. R. Quine, P. L. Zhang, Preprint (1995).
- [Vor] G. Voronoï, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques : 1 Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*, J. reine angew. Math 133 (1908), 97–178.
- [Wat] G.L. Watson, *The number of minimum points of a positive quadratic form having no perfect binary section with the same minimum*, Proc. London Math. Soc. 24 (1972), 625–646.

RESUME

Dans l'étude de la densité des empilements réguliers de sphères se dégage la notion de réseaux extrêmes, pour lesquels Voronoï a donné un algorithme d'énumération, inabordable dans la pratique au-delà de la dimension 7. Dans les premiers chapitres de cette thèse, nous élaborons de nouveaux algorithmes sélectionnant les réseaux extrêmes (laminés, en patchwork,...), et qui, implantés sur ordinateur, fournissent de nombreux réseaux nouveaux en dimensions moyennes. Au dernier chapitre, où l'on privilégie les questions de dualité, les algorithmes précédents sont plutôt utilisés à l'exploration de l'espace des réseaux. On y découvre par exemple un réseau qui réalise, en moyenne avec son dual, la densité record pour la dimension 9. On construit également en dimension 9 un chemin de réseaux isoduaux sur lequel il existe un réseau qui réalise actuellement le record de densité parmi les isoduaux.

ABSTRACT

In study of the density of regular sphere packing raises the notion of extremal lattices, for which Voronoï gave an enumeration algorithm unattainable in practice for dimension over 7. In the first chapters of this thesis, we create new algorithms selecting the extremal lattices (laminated, in patchwork,), and that, once settled on the computer, provide numerous new lattices in averages dimensions. In the last chapter, where question of duality are considered, we previous algorithms are rather used to explore the space of lattices. We discover for exemple a lattice which achieve, in average with its dual, the record density for the dimension 9. As well, we build a path of isodual lattices on wich there exist a lattice achieving the record of density among the isodual.

MOTS-CLEFS

Réseaux, perfection, extrémalité, algorithme de Voronoï, isodualité, réseau symplectique, réseau en patchwork, lamination.

FIN

091	0000 0000	140	0000 0000	091	0000 0000	140	0000 0000	091	0000 0000	140	0000 0000
Z11	0000 0000	112	0000 0000	Z11	0000 0000	112	0000 0000	Z11	0000 0000	112	0000 0000
06	0000 0000	90	0000 0000	06	0000 0000	90	0000 0000	06	0000 0000	90	0000 0000
06	0000 0000	70	0000 0000	06	0000 0000	70	0000 0000	06	0000 0000	70	0000 0000
06	0000 0000	56	0000 0000	06	0000 0000	56	0000 0000	06	0000 0000	56	0000 0000
06	0000 0000	41	0000 0000	06	0000 0000	41	0000 0000	06	0000 0000	41	0000 0000
15	0000 0000	36	0000 0000	15	0000 0000	36	0000 0000	15	0000 0000	36	0000 0000
08	0000 0000	21	0000 0000	08	0000 0000	21	0000 0000	08	0000 0000	21	0000 0000
001	0000 0000	80	0000 0000	001	0000 0000	80	0000 0000	001	0000 0000	80	0000 0000
524	0000 0000	100	0000 0000	524	0000 0000	100	0000 0000	524	0000 0000	100	0000 0000
1691	0000 0000	105	0000 0000	1691	0000 0000	125	0000 0000	1691	0000 0000	125	0000 0000
		160	0000 0000			160	0000 0000			160	0000 0000

MIRE ISO N° 1
NF Z 43-007

AFNOR
Cedex 7 - 92060 PARIS-LA-DEFENSE