

JOURNAL

de Théorie des Nombres

de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Marc GINDRAUX

Lamination et antilamination des réseaux euclidiens

Tome 21, n° 3 (2009), p. 535-557.

[<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_3_535_0>](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_3_535_0)

© Université Bordeaux 1, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Lamination et antilamination des réseaux euclidiens

par MARC GINDRAUX

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous étudions certains invariants liés à la réduction de Hermite-Korkine-Zolotareff des réseaux euclidiens (ou des formes quadratiques définies positives).

ABSTRACT. *Lamination and antilamination of Euclidean lattices.* In this paper, we study some invariants related to the Hermite-Korkine-Zolotareff reduction of Euclidean lattices (or of positive definite quadratic forms).

Introduction

Une forme quadratique réelle, définie positive, est dite *laminée* si sa décomposition en somme de carrés

$${}^t x A x = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n)^2 + \\ A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \cdots + A_n x_n^2$$

est obtenue par minimisation successive des coefficients A_1, A_2, \dots, A_{n-1} . L'invariant $\gamma''_-(A) = \min \sqrt{A_1/A_n}$, qui s'ajoute à la constante historique $\gamma''_+(A) = \max \sqrt{A_1/A_n}$ introduite par Korkine et Zolotareff, s'obtient en considérant toutes les laminations possibles. Ces invariants sont introduits pour majorer la fonction $\gamma'(A) = \sqrt{\gamma(A)\gamma(A^{-1})}$ de Bergé et Martinet et minorer (encore conjecturalement) l'invariant d'Hermite $\gamma(A)$.

Cet article introduit les *antilaminations*, consistant à maximiser successivement A_n, A_{n-1}, \dots, A_2 , et les invariants correspondants $\gamma'''_{\pm}(A)$. Nous étudierons les liens entre ces deux invariants et les utiliserons pour calculer la valeur de ces constantes pour la famille des réseaux laminés définis par Conway et Sloane.

Une liste de propriétés (e.g. comportement de récurrence de $\gamma''_{n,\pm}$ et $\gamma'''_{n,\pm}$) et d'inégalités sera établie. Nous énonçons la conjecture $\gamma'''_{5,-} = \sqrt{2}$ et étudierons ses conséquences (e.g. $\gamma_8 = 2$). Au cours de l'étude, nous mettons en évidence un phénomène inattendu : la discontinuité des ces invariants à partir de la dimension 3.

De nombreux calculs sur la famille des réseaux de Blichfeldt (infirmant l'égalité $\gamma''_{5,+} = \sqrt{2}$ que Korkine et Zolotareff ont vraisemblablement cherché à démontrer) et sur celle des réseaux de racines sont inclus dans cet article.

1. Réduction de Hermite-Korkine-Zolotareff et lamination

1.1. Notations et rappels.

Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x, y appartenant à E , et $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$ la norme du vecteur x . Un réseau Λ de E est un sous-groupe discret de rang n de E . La norme du réseau Λ est $\|\Lambda\| = \inf_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} \|x\|$ et l'ensemble des vecteurs minimaux est $S(\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid \|x\| = \|\Lambda\|\}$. Au couple (Λ, \mathcal{B}) formé d'un réseau Λ et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de Λ , on associe la forme quadratique sur \mathbb{R}^n qui, à $x \in \mathbb{R}^n$, associe $Q(x) = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|^2 = {}^t x A x$, où A est la matrice de Gram de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a ainsi une bijection entre classes d'isométrie de réseaux de E et classes modulo $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ de formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n .

Soit Λ un réseau de E , soit (e_1, \dots, e_n) une base de Λ . Le discriminant du réseau Λ est la valeur absolue du déterminant d'une base de Λ . Le carré du discriminant est appelé le déterminant de Λ , noté $\det(\Lambda)$ ou encore $\det(e_1, \dots, e_n)$. L'*invariant d'Hermite* γ du réseau Λ et la *constante d'Hermite* γ_n sont définis comme suit [4, 9] :

$$\gamma(\Lambda) = \frac{\|\Lambda\|^2}{\det(\Lambda)^{1/n}}, \quad \gamma_n = \sup_{\Lambda} (\gamma(\Lambda)).$$

Commençons par rappeler le procédé de *réduction d'Hermite* (en abrégé HKZ) des formes quadratiques définies positives (respectivement des réseaux euclidiens). Ce procédé a été introduit par Hermite [6] en 1850 et précisé par Korkine et Zolotareff en 1873 [7] ; voir également [2, 8, 9, 10]. Il généralise la notion de réduction des formes quadratiques en dimension deux, due à Lagrange ; voir aussi Gauss [5].

Soit Λ un réseau de E . Choisissons un vecteur minimal $e_1 = e_1^{(1)}$ de Λ . Projetons orthogonalement le réseau $\Lambda = \Lambda^{(1)}$ sur le sous-espace $F_1 = \mathbb{R}e_1^\perp$. Le projeté, qu'on notera $\Lambda^{(2)}$, est alors un réseau de F_1 . On répète le procédé avec le réseau $\Lambda^{(2)}$ et le sous-espace $F_2 = \mathbb{R}e_2^{(2)\perp}$ avec $e_2^{(2)}$ un vecteur minimal de $\Lambda^{(2)}$. On obtient ainsi une suite de réseaux relatifs $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(n)}$ de rang $n, n-1, \dots, 1$ et une suite de vecteurs $e_i^{(i)} \in \Lambda^{(i)}$. On relève ensuite les $e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(n)}$ en une base (e_1, \dots, e_n) de Λ de sorte que pour $i < j$, on ait $|e_i^{(i)} \cdot e_j| \leq \frac{1}{2} \|e_i^{(i)}\|^2$.

Dans le langage des formes quadratiques, soit $Q(x) = {}^t x A x$ la forme quadratique associée au réseau Λ . Quitte à remplacer Q par une forme

équivalente Q_1 , on suppose que $(1, 0, \dots, 0)$ est un vecteur minimal de Q_1 . La projection utilisée dans le cas des réseaux se traduit ici par un début de réduction de Gauss-Lagrange (décomposition en carrés)

$$Q_1(x_1, \dots, x_n) = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + Q'_1(x_2, \dots, x_n)$$

dans laquelle la forme Q'_1 correspond au réseau projeté $\Lambda^{(2)}$. En continuant le procédé avec la forme Q'_1 , on obtient au bout de $n - 1$ étapes une décomposition en carrés d'une forme équivalente à Q :

$$Q \sim A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \dots + A_n x_n^2.$$

Les coefficients α_{ij} peuvent encore être réduits de façon à être dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ceci se fait de droite à gauche par un changement de base triangulaire laissant les coefficients A_i inchangés.

Les *coefficients externes* A_1, \dots, A_n correspondent au carré des normes minimales des projetés successifs du réseau associé à la forme Q . Rappelons que $\prod_{i=1}^n A_i = \det(\Lambda)$. Les coefficients α_{ij} sont appelés les *coefficients internes*.

Remarque.

- i) Vu qu'à chaque étape, il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs minimaux, il n'existe qu'un nombre fini de réductions d'Hermite d'un réseau.
- ii) Nous appellerons réduction HKZ *faible* une réduction d'Hermite sans conditions sur les coefficients internes.

1.2. Lamination.

Nous allons définir une notion de réduction des formes quadratiques qui reprend dans son principe la notion de *réseau (fortement) laminé* due à Conway et Sloane; voir le chapitre 6 de leur livre [4].

Définition. Soit Λ un réseau de E , on appelle *lamination* de Λ le procédé récursif de réduction de la forme quadratique associée suivant :

On choisit comme premier vecteur de base de Λ un vecteur minimal, c'est-à-dire un vecteur engendrant la section unidimensionnelle, notée Λ_1 , de déterminant le plus petit parmi toutes les sections de dimension 1. On obtient ensuite une base de Λ en adjoignant à la i -ème étape un vecteur e_i qui fournit avec (e_1, \dots, e_{i-1}) une base d'une section Λ_i de rang i et de déterminant minimal parmi toutes les sections de dimension i contenant $\Lambda_{i-1} = \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$.

Proposition 1. *La lamination n'est autre qu'une réduction HKZ faible.*

Preuve. Les deux procédés coïncident à la première étape. Supposons qu'ils coïncident jusqu'à l'étape $i - 1$. Soit Λ_{i-1} la section obtenue à cette

étape. Pour déterminer une section $\Lambda_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ de déterminant minimal contenant Λ_{i-1} , il suffit de projeter orthogonalement le réseau Λ sur le sous-espace $F = (\mathbb{R}\Lambda_{i-1})^\perp$. On obtient alors le réseau $\Lambda^{(i)}$ de la réduction d'Hermite. On finit en choisissant un vecteur e_i dont la projection sur F réalise un minimum de $\Lambda^{(i)}$. Par orthogonalité, on a

$$\det(e_1, \dots, e_i) = \det(e_1, \dots, e_{i-1}) \cdot \|P_F(e_i)\|^2$$

où $P_F(e_i)$ est la projection du vecteur e_i sur le sous-espace F . Ainsi, minimiser le déterminant par rapport à e_i revient à prendre e_i tel que son projeté appartienne à $S(\Lambda^{(i)})$. \square

1.3. Fonction γ'' .

Au même titre que la fonction γ d'Hermite [9], on définit deux invariants par isométrie des réseaux. Reprenons les idées de Korkine et Zolotareff [7] et les notations introduites par Bergé et Martinet [2].

Définition. Soit Λ un réseau de E de rang n et soit A une matrice de Gram HKZ-réduite de Λ . Considérons alors la décomposition en somme de carrés de la forme quadratique associée

$${}^t x A x = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 +$$

$$A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \dots + A_n x_n^2$$

On définit les deux invariants γ'' :

$$\gamma''_+(\Lambda) = \max_{\text{HKZ}(\Lambda)} \sqrt{\frac{A_1}{A_n}} \quad \gamma''_-(\Lambda) = \min_{\text{HKZ}(\Lambda)} \sqrt{\frac{A_1}{A_n}},$$

où max et min portent sur l'ensemble des réductions HKZ du réseau Λ .

Nous montrerons plus loin que les fonctions $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$ sont bornées. Ainsi, par analogie avec la constante d'Hermite, on définit les constantes $\gamma''_{n,+}$ et $\gamma''_{n,-}$ comme étant les bornes supérieures des fonctions $\gamma''_+(\Lambda)$ et $\gamma''_-(\Lambda)$ parmi tous les réseaux Λ de E :

$$\gamma''_{n,+} = \sup_{\Lambda} (\gamma''_+(\Lambda)) \quad \gamma''_{n,-} = \sup_{\Lambda} (\gamma''_-(\Lambda)).$$

Remarque. Il suffit de prendre une réduction faible de la matrice A , car on ne s'intéresse qu'aux coefficients externes.

Lemme 1. *On suppose que (e_1, \dots, e_n) est une base HKZ de Λ . Alors pour tout $1 \leq k \leq n$,*

- i) *les bases (e_1, \dots, e_k) de la section Λ_k et $(e_{k+1}^{(k+1)}, \dots, e_n^{(k+1)})$ du projeté $\Lambda^{(k+1)}$ sont des bases HKZ,*

- ii) si de plus la base (e_1, \dots, e_n) de Λ réalise la valeur de $\gamma''_+(\Lambda)$ (respectivement $\gamma''_-(\Lambda)$), alors $(e_{k+1}^{(k+1)}, \dots, e_n^{(k+1)})$ réalise $\gamma''_+(\Lambda^{(k+1)})$ (respectivement $\gamma''_-(\Lambda^{(k+1)})$).

Preuve.

- i) Pour $1 \leq i \leq k$, le projeté $\Lambda_k^{(i)}$ du réseau Λ_k est une section de $\Lambda^{(i)}$. Comme $e_i^{(i)}$ est un vecteur minimal de $\Lambda^{(i)}$, c'est aussi un minimum de $\Lambda_k^{(i)}$, ce qui montre que (e_1, \dots, e_k) est une base HKZ de Λ_k . Par définition même de la réduction d'Hermite, le réseau $\Lambda^{(k+1)}$ est réduit.
- ii) Considérons une nouvelle base HKZ, $(\varepsilon_{k+1}^{(k+1)}, \dots, \varepsilon_n^{(k+1)})$, du réseau $\Lambda^{(k+1)}$. En relevant les vecteurs $e_1^{(1)}, \dots, e_k^{(k)}, \varepsilon_{k+1}^{(k+1)}, \dots, \varepsilon_n^{(n)}$ en une base $(e_1, \dots, e_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$ de Λ , nous obtenons une base HKZ de Λ satisfaisant $\|e_1\|/\|\varepsilon_n^{(n)}\| \leq \|e_1\|/\|e_n^{(n)}\| = \gamma''_+(\Lambda)$. On en déduit que

$$\|\varepsilon_{k+1}^{(k+1)}\|/\|\varepsilon_n^{(n)}\| \leq \|e_{k+1}^{(k+1)}\|/\|e_n^{(n)}\|.$$

La démonstration est la même pour $\gamma''_-(\Lambda)$. □

Il a été démontré par Hermite que $\gamma_n \leq (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$; il en est de même pour la fonction γ'' .

Proposition 2. Les fonctions $\gamma''_{n,\pm}$ sont majorées par $(\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$.

Preuve. On montre par récurrence que, quel que soit le réseau Λ de E , $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$. Regardons le cas $n = 2$.

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^2 . On a $A_1 A_2 = \det(\Lambda)$, ainsi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(A_1)^2}{A_1 \cdot A_2} = \frac{(A_1)^2}{\det(\Lambda)} = \gamma^2(\Lambda).$$

Comme $\gamma(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{1/2}$, on a $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{1/2}$. Pour $n \geq 3$, on conclut par récurrence via l'égalité

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{A_2}{A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}}{A_n} \right),$$

qui entraîne $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\gamma''_{2,+})^{(n-1)} = (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$. □

1.4. Exemples.

La famille des réseaux de Blichfeldt (1935).

La famille des réseaux de Blichfeldt [3] joue un rôle important dans l'étude de la fonction γ'' . Korkine et Zolotareff ont calculé les valeurs de la fonction $\gamma''_{n,+}$ pour $n \leq 4$. Il semble vraisemblable qu'ils aient cherché à prouver que $\gamma''_{5,+} = \sqrt{2}$. La famille des réseaux de Blichfeldt infirme cependant cette égalité. Elle est en fait l'unique chemin à isométrie près de l'algorithme de Voronoï reliant les formes parfaites \mathbb{D}_5 et \mathbb{A}_5 . Pour $0 \leq r \leq 2$, les formes quadratiques associées sont

$$2 \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \right)^2 + \frac{3}{2} \left(x_2 - \frac{1}{3}(x_3 + x_4 - x_5) \right)^2 + \frac{4}{3} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \right)^2 + (1+r) \left(x_4 - \frac{1}{2}x_5 \right)^2 + (1 - \frac{1}{4}r)x_5^2.$$

Pour $0 < r < \frac{2}{3}$, on obtient des valeurs différentes pour γ''_- et γ''_+ . Pour les autres valeurs du paramètre r , les deux fonctions sont confondues. Remarquons que γ''_- est toujours inférieure à $\sqrt{2}$. Par contre pour des valeurs du paramètre r comprises entre 0 et $(3 - \sqrt{2})/2$, la fonction γ''_+ est strictement supérieure à $\sqrt{2}$ (cf. Fig. 1). En particulier, le cas $r = \frac{1}{4}$ est intéressant. C'est, à l'heure actuelle, le record pour la fonction γ''_+ en dimension 5. En choisissant les bonnes réductions d'Hermite, on obtient pour ce réseau

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{8} \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 2 \end{pmatrix} \text{ qui fournit la valeur } \gamma''_+ = \sqrt{\frac{32}{15}},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \frac{7}{8} & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{7}{8} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ qui fournit la valeur } \gamma''_- = \sqrt{\frac{19}{10}}.$$

Chemin de Voronoï entre \mathbb{D}_5 et \mathbb{D}_5 .

Il y a, à équivalence près, deux chemins de Voronoï différents reliant la forme parfaite \mathbb{D}_5 à une forme équivalente [9]. Nous ne considérerons ici que le chemin paramétré comme suit

$$A(r) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1+r & 1-r \\ 1 & 2 & 1 & 1+r & 1-r \\ 1 & 1 & 2 & 1+r & 1-r \\ 1+r & 1+r & 1+r & 2+2r & -r \\ 1-r & 1-r & 1-r & -r & 2 \end{pmatrix}$$

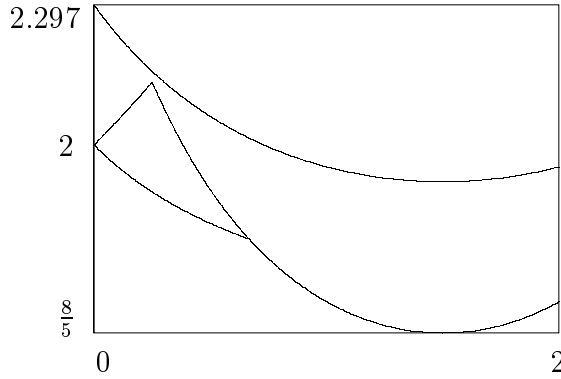


FIG. 1. De haut en bas γ^2 , $(\gamma_+'')^2$, et $(\gamma_-'')^2$ des réseaux de Blichfeldt

où $0 \leq r \leq 1$. (C'est le chemin de Voronoï $\mathbb{D}_5 - \mathbb{D}_5$ qui conserve une section \mathbb{D}_4 .) Les matrices de Gram $A(r)$ et $A(1-r)$ sont équivalentes par $A(r) = {}^t S A(1-r) S$, avec

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A l'exception de $r = 0, \frac{1}{2}$ et 1 où $\gamma_+'' = \sqrt{2}$, la fonction γ_+'' est strictement supérieure à $\sqrt{2}$ (cf. Fig. 2) avec un maximum de $\sqrt{45/22}$ atteint aux points $r = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{2}{3}$ sur la base

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La fonction γ_-'' est, à l'exception des deux extrémités, inférieure à $\sqrt{2}$ avec un minimum sur le réseau eutactique obtenu avec le paramètre $r = \frac{1}{2}$.

Remarque. Ces deux chemins de Voronoï sont les seuls en dimension 5 pour lesquels la fonction γ_+'' prend des valeurs supérieures à $\sqrt{2}$.

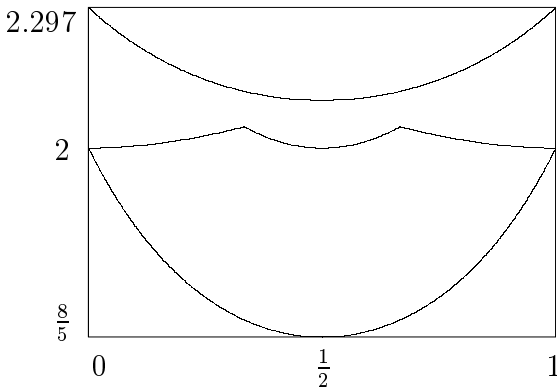


FIG. 2. De haut en bas γ^2 , $(\gamma''_+)^2$, et $(\gamma''_-)^2$

2. Antilamination

2.1. Notations et rappels.

Soient Λ un réseau de E , (e_1, \dots, e_n) une base de Λ et A la matrice de Gram associée. On note Λ^* son dual et (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale, de matrice de Gram A^{-1} . On désigne par \overline{A} la matrice de Gram du réseau Λ où l'on prend les coordonnées dans l'ordre inverse. Matriciellement, elle s'obtient par $\overline{A} = {}^t s A s$, avec

$$s = {}^t s = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Commençons par deux lemmes (cf. [9] ; 3.4 et 3.5).

Lemme 2. *Soient Λ un réseau de E et F un sous-espace de E . Pour que $\Lambda \cap F$ soit un réseau de F , il faut et il suffit que $\Lambda^* \cap F^\perp$ soit un réseau de F^\perp .*

En outre si ces conditions sont vérifiées, le dual de $\Lambda \cap F$ est la projection sur F du dual de Λ , c'est-à-dire

$$(\Lambda \cap F)^* = p_F(\Lambda^*).$$

Lemme 3. *Soit $r \leq n$ un entier et soit (e_1, \dots, e_n) une base du réseau Λ de l'espace vectoriel E . Notons F le sous-espace de E engendré par (e_1, \dots, e_r) . On a l'égalité :*

$$\det(\Lambda \cap F) = \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda^* \cap F^\perp).$$

2.2. Antilamination.

On définit un procédé de réduction des formes quadratiques qui reprend

les idées de la lamination. Soit Λ un réseau de E et soit A une matrice de Gram du réseau Λ .

Définition. On appelle *antilamination* de A (en abrégé A_{anti}) le procédé récursif de réduction de la forme quadratique suivant :

On prend comme dernier vecteur de base e_n un vecteur tel que le sous-réseau $\Lambda_{n-1} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs de base de Λ soit de déterminant $\det(e_1, \dots, e_{n-1})$ minimal. On applique alors le même procédé au sous réseau Λ_{n-1} , et ainsi de suite, pour obtenir une antilamination de Λ .

Par le lemme 3, il convient de prendre comme dernier vecteur de base du réseau Λ un vecteur minimal du dual Λ^* . En effet, afin que $\det(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit minimal, il faut et il suffit que e_n^* soit un vecteur minimal de Λ^* , car

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(e_n^*) .$$

Ainsi, on observe qu'opérer une antilamination d'un réseau Λ revient à faire une lamination de son dual. Plus précisément :

Proposition 3. *La base (e_1, \dots, e_n) du réseau Λ est antilaminée si et seulement si la base (e_n^*, \dots, e_1^*) du dual Λ^* est laminée. En d'autres termes,*

$$A_{anti} = \overline{((A^{-1})_{HKZ})^{-1}}.$$

Preuve. Notons (e_1, \dots, e_n) une base antilaminée de Λ , A sa matrice de Gram et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Soit $F = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{n-1})$ le sous-espace de codimension 1. Comme A est antilaminée, par le lemme 3, e_n^* est un vecteur minimal de $\overline{A^{-1}}$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_{n-1}) \subset F$ une base de Λ_{n-1} . Par le lemme 2, la base duale de β dans F est $\beta^* = (p_F(e_1^*), \dots, p_F(e_{n-1}^*))$. Comme F est orthogonal à e_n^* , cela revient à projeter orthogonalement Λ^* par rapport à e_n^* . Comme A est antilaminée, $p_F(e_{n-1}^*)$ est un minimum du réseau $p_F(\Lambda^*)$. Ceci correspond à la seconde étape de la réduction d'Hermite de $\overline{A^{-1}}$. En itérant le procédé, on obtient une réduction d'Hermite (faible) de $\overline{A^{-1}}$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de Λ telle que $\overline{A^{-1}} = \overline{\text{Gram}(e_1^*, \dots, e_n^*)}$ soit réduite au sens d'Hermite faible. Alors e_n^* est un vecteur minimal du dual de Λ . Ceci correspond à la première étape de l'antilamination de Λ . Comme la base duale de (e_1, \dots, e_n) dans $F = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est la projection orthogonale de Λ^* sur F par rapport à e_n^* , on obtient que $p_F(e_{n-1}^*)$ est un vecteur minimal du projeté $p_F(\Lambda^*)$ (car $\text{Gram}(\Lambda^*)$ est réduite au sens HKZ). Ainsi, par récurrence sur le rang n du réseau, on vérifie que la base (e_1, \dots, e_n) est antilaminée. \square

2.3. Fonction γ''' .

Définition. Soit Λ un réseau de E et soit A une matrice de Gram antilaminée de Λ . Considérons alors la décomposition en somme de carrés de la forme quadratique associée

$${}^t x A x = B_1(x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n)^2 + \\ B_2(x_2 + \beta_{23}x_3 + \cdots + \beta_{2n}x_n)^2 + \cdots + B_n x_n^2$$

Pour le réseau Λ , on définit les invariants :

$$\gamma_+'''(\Lambda) = \max_{\text{anti}(\Lambda)} \sqrt{\frac{B_1}{B_n}} \quad \gamma_-'''(\Lambda) = \min_{\text{anti}(\Lambda)} \sqrt{\frac{B_1}{B_n}},$$

où max et min portent sur toutes les antilaminations du réseau Λ .

A l'instar de $\gamma_{\pm}''(\Lambda)$, les fonctions $\gamma_{\pm}'''(\Lambda)$ sont bornées. Par définition, les constantes $\gamma_{n,+}'''$ et $\gamma_{n,-}'''$ sont les bornes supérieures des fonctions $\gamma_+'''(\Lambda)$ et $\gamma_-'''(\Lambda)$ prises sur tous les réseaux Λ de E :

$$\gamma_{n,+}''' = \sup_{\Lambda} (\gamma_+'''(\Lambda)) \quad \gamma_{n,-}''' = \sup_{\Lambda} (\gamma_-'''(\Lambda)).$$

Lemme 4.

$$\gamma_+'''(\Lambda) = \max_{\text{anti}(\Lambda)} \sqrt{B_1} \cdot \|\Lambda^*\| \quad \text{et} \quad \gamma_-'''(\Lambda) = \min_{\text{anti}(\Lambda)} \sqrt{B_1} \cdot \|\Lambda^*\|.$$

Preuve. Par le lemme 3, nous avons

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \|e_n^*\|^2.$$

D'autre part, nous avons

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \det(e_1, \dots, e_{n-1}) \cdot B_n,$$

d'où $B_n = \|\Lambda^*\|^{-2}$. □

2.4. Relation entre γ'' et γ''' .

Proposition 4. Soit Λ un réseau de E et soit Λ^* son dual. On a

$$\gamma_{n,\pm}'''(\Lambda) = \gamma_{n,\pm}''(\Lambda^*).$$

Preuve. Nous avons vu que toute matrice de Gram antilaminée A du réseau Λ est telle que la matrice $\overline{A^{-1}}$ est une matrice de Gram réduite au sens d'Hermité de Λ^* , et vice-versa. Notons encore (e_1, \dots, e_n) la base antilaminée associée à la matrice de Gram A et (e_n^*, \dots, e_1^*) celle attachée à la matrice $\overline{A^{-1}}$. Les décompositions de Gauss-Lagrange respectives sont

$${}^t x A x = B_1(x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n)^2 + \cdots + B_n x_n^2, \\ {}^t y \overline{A^{-1}} y = A_1(y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots + \alpha_{1n}y_n)^2 + \cdots + A_n y_n^2.$$

Montrons alors que

$$[B_1, B_2, \dots, B_n] = \left[\frac{1}{A_n}, \frac{1}{A_{n-1}}, \dots, \frac{1}{A_1} \right],$$

ce qui entraîne en particulier que $\frac{B_1}{B_n} = \frac{A_1}{A_n}$, prouvant la proposition. Par le lemme 3,

$$\det(e_1, \dots, e_r) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(e_n^*, \dots, e_{r+1}^*)$$

entraînant

$$B_{r+1} \dots B_n A_1 \dots A_{n-r} = 1$$

pour tout r avec $1 \leq r \leq n-1$. □

Conséquences.

- i) La transcription du lemme 1 aux antilaminations montre que si la base (e_1, \dots, e_n) réalise la valeur de γ''_{\pm} , il en est alors de même de (e_1, \dots, e_k) pour $k = 1, \dots, n$. En revanche, la projection sur l'orthogonal, quoique fournissant aussi une antilamination, ne réalise pas toujours la valeur de γ''_{\pm} .

- ii) On a $\gamma'''_{n,\pm} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2}$.

2.5. Constantes γ'' et γ''' des réseaux \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 et \mathbb{E}_8 .

Appliquons les résultats précédents aux réseaux fortement laminés de dimension inférieure à 8 [4], qui sont

$$\mathbb{A}_1 = \sqrt{2}\mathbb{Z}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7 \text{ et } \mathbb{E}_8.$$

Comme ces réseaux sont absolument extrêmes, on obtient une lamination du réseau \mathbb{E}_8 en considérant la base provenant directement de cette famille. Les coefficients externes de cette lamination de \mathbb{E}_8

$$\left[2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

sont obtenus par comparaison des déterminants de ces réseaux, à savoir 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1. Comme \mathbb{E}_8 est unimodulaire et que les coefficients externes satisfont la symétrie $A_i = \frac{1}{A_{9-i}}$, cette lamination est également une antilamination de \mathbb{E}_8 . Vu que le groupe des automorphismes de chacun de ces réseaux agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux de son dual, chacun possède une unique section de codimension 1 de déterminant minimal. Il n'existe donc, à isométrie près, qu'une lamination ou antilamination de \mathbb{E}_8 . On a en outre :

$$\gamma''_{\pm}(\mathbb{E}_6) = \gamma'''_{\pm}(\mathbb{E}_6) = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma''_{\pm}(\mathbb{E}_7) = \gamma'''_{\pm}(\mathbb{E}_7) = \sqrt{3}$$

$$\text{et } \gamma''_{\pm}(\mathbb{E}_8) = \gamma'''_{\pm}(\mathbb{E}_8) = \gamma(\mathbb{E}_8) = 2.$$

Un calcul similaire peut être fait pour le réseau de Leech Λ_{24} , mais celui-ci ne fournit que la valeur des fonctions

$$\gamma''_-(\Lambda_{24}) = \gamma'''_-(\Lambda_{24}) = 4 = \gamma(\Lambda_{24}).$$

La valeur de γ''_+ est inconnue et pourrait dépasser 4.

3. Quelques propriétés

Propriété 1. *Pour $1 \leq k \leq n$, on a*

$$\gamma''_{n,+} \leq \gamma''_{k,+} \cdot \gamma''_{n-k+1,+} \quad \text{et} \quad \gamma''_{n,-} \leq \gamma''_{k,+} \cdot \gamma''_{n-k+1,-}.$$

Preuve. Quel que soit le réseau Λ de l'espace euclidien E , montrons que $\gamma''_{\pm}(\Lambda) \leq \gamma''_{k,+} \cdot \gamma''_{n-k+1,\pm}$. Soit $(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ une base du réseau réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda)$ (respectivement $\gamma''_-(\Lambda)$), notons Λ_k le sous-réseau engendré par (e_1, \dots, e_k) et $\Lambda^{(k)}$ le k -ième projeté de Λ . D'après le lemme 1, (e_1, \dots, e_k) est une lamination de Λ_k et $(e_k^{(k)}, \dots, e_n^{(k)})$ une lamination de $\Lambda^{(k)}$ réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda^{(k)})$ (resp. $\gamma''_-(\Lambda^{(k)})$). Alors,

$$\gamma''_{\pm}\Lambda = \frac{\|\Lambda^{(1)}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} = \frac{\|\Lambda^{(1)}\|}{\|\Lambda^{(k)}\|} \cdot \frac{\|\Lambda^{(k)}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} \leq \gamma''_+(\Lambda_k) \gamma''_{\pm}(\Lambda^{(k)}) \leq \gamma''_{k,+} \gamma''_{n-k+1,\pm}.$$

□

Conséquence. En appliquant la propriété précédente à $n = 2k - 1$, on obtient

$$\gamma''_{2k-1,\pm} \leq (\gamma''_{k,+})^2.$$

Rappel. L'invariant d'Hermite dual γ' d'un réseau Λ de E et la constante d'Hermite duale, introduits par Bergé et Martinet [2, 9], sont définis par

$$\gamma'(\Lambda) = \|\Lambda\| \|\Lambda^*\|, \quad \gamma'_n = \sup_{\Lambda} (\gamma'(\Lambda)).$$

Propriété 2. *Pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité*

$$\gamma'(\Lambda) \leq \gamma''_{\pm}(\Lambda),$$

et donc

$$\gamma'_n \leq \gamma''_{n,\pm}.$$

Preuve. On fait appel à l'antilamination du réseau Λ . Comme $\gamma'''_{\pm}(\Lambda) = \sqrt{B_1} \|\Lambda^*\|$, on a alors

$$\gamma'''_{\pm}(\Lambda) = \sqrt{B_1} \|\Lambda^*\| \geq \|\Lambda\| \|\Lambda^*\| = \gamma'(\Lambda).$$

Pour γ'' , on conclut par $\gamma'(\Lambda) = \gamma'(\Lambda^*)$. □

Propriété 3. *Pour tout nombre entier n supérieur à 2, on a*

$$\gamma''_{n,\pm} \geq \sqrt{\frac{\gamma''_n}{\gamma''_{n-1}}}.$$

Preuve. C'est une conséquence de la propriété 2 et de l'inégalité analogue pour γ' (cf. [2] ; 2.6(i) avec $k = 1$). \square

Propriété 4. *pour tout entier $n \geq 1$, nous avons*

$$\gamma_n^{n/2} \leq \gamma_{2,\pm}'' \cdots \gamma_{n,\pm}'' .$$

Preuve. Itérer sur le rang n du réseau Λ l'inégalité de la propriété 3. \square

Propriété 5. *La fonction $\gamma_{n,+}''$ est croissante en n :*

$$\forall n, \quad \gamma_{n+1,+}'' \geq \gamma_{n,+}'' .$$

Preuve. Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n . Construisons un réseau $\tilde{\Lambda}$ de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\gamma_+''(\tilde{\Lambda}) \geq \gamma_+''(\Lambda)$. Notons (e_1, \dots, e_n) la base orthonormée standard de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_{n+1}) celle de \mathbb{R}^{n+1} . Quitte à user d'une homothétie, supposons que le réseau Λ soit de minimum 1. Considérons alors le réseau $\tilde{\Lambda}$ somme directe orthogonale du réseau Λ et de $\mathbb{Z}e_{n+1}$. Alors $\gamma_+''(\tilde{\Lambda}) \geq \gamma_+''(\Lambda)$. En effet, e_{n+1} est un vecteur minimal de $\tilde{\Lambda}$ au même titre que ceux de Λ . On peut donc choisir e_{n+1} comme premier vecteur de base lors de la réduction d'Hermite de $\tilde{\Lambda}$. En projetant sur le plan orthogonal à e_{n+1} , on obtient le réseau Λ . En continuant le procédé de réduction par le choix des vecteurs minimaux de Λ qui mène à $\gamma_+''(\Lambda)$, on obtient :

$$\gamma_+''(\tilde{\Lambda}) \geq \frac{\|e_{n+1}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} = \gamma_+''(\Lambda) ,$$

où $\Lambda^{(n)}$ désigne le n -ième projeté du réseau Λ . \square

Remarque. Pour des réseaux dont la constante γ_+'' est supérieure ou égale à 1, cette construction n'augmente pas la valeur de γ_+'' . Seuls ceux dont γ_+'' est inférieure à 1 passent à la valeur 1.

Propriété 6. *La fonction $\gamma_{n,-}''$ est croissante en n :*

$$\forall n, \quad \gamma_{n+1,-}'' \geq \gamma_{n,-}'' .$$

Preuve. La preuve de la propriété 5 ne s'applique pas sans modification. En effet, pour le réseau $\tilde{\Lambda}$, on a $\gamma_-''(\tilde{\Lambda}) = \min(1, \gamma_-''(\Lambda))$. On construit alors une suite de réseaux ${}_j\tilde{\Lambda}$ de \mathbb{R}^{n+1} , indexée par $j \in \mathbb{N}$, telle que la suite $\gamma_-''({}_j\tilde{\Lambda})$ converge vers $\gamma_-''(\Lambda)$. Reprenons les notations de la preuve précédente et considérons la famille ${}_j\tilde{\Lambda} = (1 - \frac{1}{j})\mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \Lambda$. Toute lamination du réseau doit débiter par le choix du vecteur minimal $(1 - \frac{1}{j})e_{n+1}$. On obtient ainsi :

$$\gamma_-''({}_j\tilde{\Lambda}) = \frac{1 - \frac{1}{j}}{\sqrt{A_n}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{A_n}} = \gamma_-''(\Lambda)$$

où A_n est le dernier coefficient externe de la réduction HKZ de Λ . \square

Remarque. La constante d'Hermite γ_n n'est probablement pas croissante en n (on s'attend qu'en dimension 25, elle soit atteinte sur les réseaux laminés).

Propriété 7.

$$\gamma_n^{n/2} \leq (\gamma_{n,-}'')^{n-1} .$$

Preuve. Combiner les propriétés 4 et 6. □

Propriété 8. Pour tout entier naturel n pair, on a

$$\gamma_{n,\pm}'' \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8}} \gamma_n .$$

Pour n impair, on a

$$\gamma_{n,\pm}'' \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8} + \frac{1}{8n}} \gamma_n .$$

Preuve. Soit ${}_j\Lambda$ une famille de réseaux de E dont la suite de constantes $\gamma_+''({}_j\Lambda)$ tendent vers la valeur $\gamma_{n,+}''$. Alors, à la limite, le coefficient externe A_1 est supérieur ou égal aux autres coefficients externes. Sinon, cela contredirait la croissance de la fonction γ'' . Rappelons encore que, lors d'une réduction d'Hermite, les relevés des projetés satisfont

$$\|e_k^{(k-1)}\| \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \|e_k^{(k)}\| .$$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base réduite au sens d'Hermite. Par les deux remarques précédentes, on peut écrire, pour n pair,

$$\sqrt{\det(\Lambda)} = \|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_2^{(2)}\| \dots \|e_n^{(n)}\| \leq \|e_1^{(1)}\|^{n/2} \cdot \|e_n^{(n)}\|^{n/2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\frac{1}{4}} .$$

D'où

$$\|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_n^{(n)}\| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{8}} \cdot \det(\Lambda)^{\frac{1}{n}} .$$

Ainsi

$$\gamma_{n,+}'' = \frac{\|e_1^{(1)}\|}{\|e_n^{(n)}\|} = \frac{\|\Lambda\|^2}{\|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_n^{(n)}\|} \leq \frac{\|\Lambda\|^2}{\det(\Lambda)^{1/n}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8}} .$$

Pour n impair, on procède de même en écrivant

$$\sqrt{\det(\Lambda)} = \|e_1^{(1)}\| \dots \|e_{(n-1)/2}^{((n-1)/2)}\| \cdot \|e_{(n+1)/2}^{((n+1)/2)}\|^{1/2} \cdot \|e_{(n+1)/2}^{((n+1)/2)}\|^{1/2} \dots \|e_n^{(n)}\| .$$

□

Propriété 9. On a l'inégalité asymptotique

$$\gamma_{n,\pm}'' \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln n} .$$

Preuve. En traduisant dans nos notations la proposition 4.2 de [8], on obtient : soit (e_1, \dots, e_n) une base réduite au sens d'Hermite du réseau Λ de E . Notons A_1, \dots, A_n les coefficients externes associés. On a alors

$$A_i \geq \|\Lambda\|^2 \cdot i^{-(i+\ln i)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Ce qui montre que

$$\gamma_+''^2(\Lambda) = \frac{A_1}{A_n} \leq \frac{\|\Lambda\|^2}{\|\Lambda\|^2} \cdot n^{1+\ln n} \quad \text{pour tout réseau } \Lambda \text{ de rang } n.$$

□

Remarque. Contrairement à la constante γ pour laquelle on connaît une inégalité asymptotique linéaire en n , on doit ici se satisfaire d'une inégalité exponentielle. Cela découle du fait que nous ne sommes pas encore capables de prouver que $\gamma_{n,\pm}'' \leq \gamma_n$, bien que nous en soyons intimement convaincus. En effet, il existe des réseaux Λ pour lesquels les constantes $\gamma_{\pm}''(\Lambda)$ sont supérieures à la constante $\gamma(\Lambda)$, comme le montre le réseau \mathbb{E}_6^* étudié dans la section 3.5, pour lequel $\gamma(\mathbb{E}_6^*) = 4 \cdot 3^{-5/6} < \sqrt{8/3} = \gamma_{\pm}''(\mathbb{E}_6^*)$.

4. Discontinuité

Il est bien connu que les fonctions γ et γ' sont continues. Ceci permet, par un argument standard de compacité, de montrer que les bornes sont atteintes. Ce phénomène ne se produit pas pour les fonctions γ_{\pm}'' et γ_{\pm}''' . En effet, on verra que ces fonctions sont discontinues dès la dimension 3. Une étude locale est donc sans objet.

4.1. Cas des dimensions un et deux.

Proposition 5. *Pour $n = 1$ et 2, les fonctions γ_{\pm}'' (respectivement γ_{\pm}''') sont continues et coïncident avec les fonctions γ et γ' .*

Preuve. Le cas $n = 1$ est trivial. Pour tout réseau Λ de dimension 2, on a

$$\gamma_{\pm}''(\Lambda) = \gamma_{\pm}'''(\Lambda) = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = \frac{\|\Lambda\|}{\sqrt{A_1 A_2}} = \frac{\|\Lambda\|}{\sqrt{\det(\Lambda)}} = \gamma(\Lambda) = \gamma'(\Lambda)$$

qui sont continues.

□

Corollaire. *On a $\gamma_{2,\pm}'' = \gamma_{2,\pm}''' = \sqrt{\frac{4}{3}} = \gamma_2$, valeur atteinte sur le réseau hexagonal \mathbb{A}_2 .*

4.2. Dimensions trois et plus.

Reprenons la famille de réseaux de la propriété 6. La famille de réseaux $_j\tilde{\Lambda}$ converge vers le réseau $\mathbb{Z} \oplus \Lambda$ lorsque j tend vers l’infini. On a vu que la fonction $\gamma''_{\pm}(j\tilde{\Lambda})$ converge vers $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$. Par contre on montre aisément que $\gamma''(\mathbb{Z} \oplus \Lambda) = 1$, qui est en général différent de $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$. Ceci démontre la discontinuité de la fonction γ''_{\pm} .

Regardons plus en détail, le cas de la famille $\Lambda(\varepsilon) = \mathbb{A}_2 \oplus (\sqrt{2 + \varepsilon})\mathbb{Z}$, $-2 < \varepsilon$, de forme quadratique $2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + (2 + \varepsilon)x_3^2$. On observe que pour ε négatif, le minimum du réseau est $(2 + \varepsilon)$, tandis que pour ε positif, il vaut 2. Ainsi suivant la valeur du paramètre ε , on est obligé de choisir le minimum dans la composante orthogonale de $(\sqrt{2 + \varepsilon})\mathbb{Z}$ ou de \mathbb{A}_2 . On obtient

$$\gamma''_{\pm}(\Lambda(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{4 + 2\varepsilon}{3}} \quad \text{pour } \varepsilon < 0 \quad \text{et} \quad \gamma''_{\pm}(\Lambda(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{2}{2 + \varepsilon}} \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Pour $\varepsilon = 0$, nous avons $\gamma''_{-}(\Lambda(0)) = 1$ et $\gamma''_{+}(\Lambda(0)) = \sqrt{\frac{4}{3}}$. On observe un saut au point $\varepsilon = 0$, comme l’illustre la figure 3.

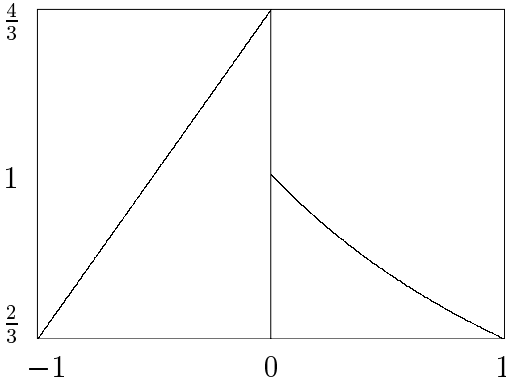


FIG. 3. Discontinuité pour la famille $\Lambda(\varepsilon)$

Remarque. Notons que pour ε négatif, les fonctions γ''_{\pm} sont supérieures à la fonction d’Hermite γ , et que les rôles s’inversent pour ε positif. Enfin pour $\varepsilon \in]-2, -\frac{1}{2}]$ et pour ε positif, les fonctions γ''_{\pm} et γ' sont confondues. Par contre pour $\varepsilon \in]-\frac{1}{2}, 0[$, γ' vaut 1 et est donc inférieure aux fonctions γ''_{\pm} .

Les discontinuités des fonctions γ''_{\pm} se produisent au moment précis où le *kissing number* de la famille de réseaux $\Lambda(\varepsilon)$ admet son maximum. Ce phénomène se reproduit aussi en des dimensions supérieures. Notons toutefois que cette discontinuité peut ne prendre source qu’à partir d’un des projetés du réseau, comme le montre l’exemple suivant :

Plongeons le réseau $\Lambda(0)$ dans \mathbb{R}^4 , et notons e_1, e_2, e_3 l'image de la base de $\Lambda(0)$, et e_4 un vecteur normé orthogonal à $\Lambda(0)$. Considérons le réseau

$$\mathbb{Z}(e_1 + \alpha_1 e_4) + \mathbb{Z}(e_2 + \alpha_2 e_4) + \mathbb{Z}(e_3 + \alpha_3 e_4) + \mathbb{Z}e_4 .$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont réels. En prenant α_1 et α_3 non nuls, on obtient un réseau indécomposable dont l'ensemble des vecteurs minimaux est restreint à $\pm e_4$. En projetant sur le plan perpendiculaire à e_4 , on retombe sur le réseau $\Lambda(0)$. Ainsi, la discontinuité se produit au moment où le *kissing number* du second projeté atteint son maximum.

Certes, ces différents exemples proviennent de réseaux décomposables où tout à été fait pour produire cette discontinuité. Il est donc utile de savoir que même dans des situations rigides comme un chemin de Voronoï entre deux formes parfaites des discontinuités apparaissent.

Les chemins de Voronoï entre les formes \mathbb{D}_n et \mathbb{A}_n pour $n \geq 6$. Considérons la paramétrisation de l'unique chemin de Voronoï entre les formes parfaites \mathbb{D}_n et \mathbb{A}_n , pour $n \geq 6$, donnée par

$$\Lambda(r) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 2 & r \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & r & 2 \end{pmatrix}$$

avec r compris entre 0 et 1. Pour $r \geq \frac{n-4}{2(n-1)}$, cette matrice est une lamination de la famille réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda(r))$. On peut montrer que la fonction $\gamma''_+{}^2$ admet un maximum de $\frac{8(n-1)}{3n}$ au point $r = \frac{n-4}{2(n-1)}$ (ce résultat est aussi valable pour la dimension 5). Dès la dimension $n \geq 6$, on observe une discontinuité pour γ''_+ en $r = \frac{n-5}{2(n-2)}$, qui est exactement l'endroit où est atteint le maximum en dimension $n-1$. Par contre, la fonction γ''_- coïncide avec γ' et est donc continue sur le chemin de Voronoï. Comme nous le montre la figure 4, $\gamma''_{\pm}(\Lambda(r))$ est inférieure à $\gamma(\Lambda(r))$. Dans tous les cas, la réduction d'Hermite peut débiter par les trois premiers vecteurs de la base ci-dessus. Ceci montre que la discontinuité de γ''_+ est la conséquence du choix d'un vecteur minimal dans le quatrième projeté du réseau.

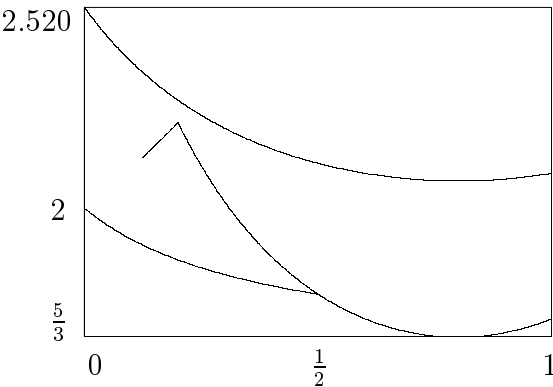


FIG. 4. Discontinuité sur le chemin de Voronoï entre D_6 et A_6 .
De haut en bas, γ^2 , $(\gamma''_+)^2$, et $(\gamma''_-)^2 = (\gamma')^2$

5. Résultats numériques et conjecture

Les valeurs de la fonction $\gamma''_{n,+}$ ne sont actuellement connues que pour les dimensions n inférieures ou égales à 4. Dès la dimension 5, nous ne connaissons pas la valeur de cette fonction. Nous disposons par contre de quelques inégalités. Dans cette section, nous rappelons les résultats obtenus par Korkine et Zolotareff et les généralisons pour la fonction $\gamma''_{n,-}$. Ces résultats s'appliquent évidemment aux fonctions $\gamma'''_{n,\pm}$ en considérant les réseaux duaux. Le cas des dimensions $n = 1$ et $n = 2$ a déjà été traité dans la section 4. Nous avons établi que :

Théorème 1. *Pour $n = 1$, on a $\gamma''_{1,\pm} = \gamma'''_{1,\pm} = 1$, valeur atteinte sur le réseau \mathbb{Z} .*

Pour $n = 2$, on a $\gamma''_{2,\pm} = \gamma'''_{2,\pm} = \sqrt{\frac{4}{3}}$, valeur atteinte sur le réseau hexagonal \mathbb{A}_2 .

5.1. Dimensions 3 et 4.

En 1873, Korkine et Zolotareff ont établi l'inégalité difficile $\gamma''_{3,+} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ([3] inégalité 3.5, [7, 10]). Ils ont également établi que cette valeur n'est atteinte que sur le réseau cubique à faces centrées $\mathbb{D}_3 \sim \mathbb{A}_3$ et son dual, le réseau cubique centré \mathbb{D}_3^* . Notons que la valeur $\gamma''_{3,+} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ coïncide avec la valeur de la constante γ'_3 . Elle est cependant strictement inférieure à $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$.

Théorème 2 (Korkine et Zolotareff [7]). *Les coefficients externes d'une réduction d'Hermite (ou lamination) d'une forme quadratique définie positive de rang n satisfont*

$$\begin{aligned} A_{i+1} &\geq \frac{3}{4} A_i && \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1, \\ A_{i+2} &\geq \frac{2}{3} A_i && \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

En reprenant ce résultat et en observant que le groupe des automorphismes de \mathbb{D}_3 agit transitivement sur les vecteurs minimaux, on obtient :

Théorème 3. *Pour $n = 3$, on a $\gamma''_{3,\pm} = \gamma'''_{3,\pm} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, valeur atteinte sur le réseau $\mathbb{D}_3 \sim \mathbb{A}_3$ et son dual \mathbb{D}_3^* .*

On se propose de donner une démonstration indépendante de celle de Korkine et Zolotareff pour la constante $\gamma''_{3,-}$. Celle-ci se base sur la classification duale des réseaux de dimension 3 due à Bergé [1]. Pour un réseau Λ , notons S l'ensemble des vecteurs minimaux et $s = |S|/2$ le demi *kissing number*, S^* et s^* les analogues pour le dual Λ^* de Λ .

L'invariant γ'' d'une lamination du réseau Λ de rang 3 ne dépend que du premier vecteur minimal $x \in S$ de départ. Notons le alors γ''_x :

$$\gamma''_x = \sqrt{\min \Lambda \cdot \min(\Lambda^* \cap x^\perp)};$$

x étant fixé, c'est une fonction continue sur l'ensemble des réseaux $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ admettant x comme vecteur minimal.

Proposition 6. *On a l'équivalence*

$$\gamma''_x = \gamma' \iff \exists y \in S^* \text{ tel que } y \perp x.$$

Mieux, il existe au plus un vecteur minimal $x \in S$ tel que $\gamma''_x > \gamma'$. Cela se produit lorsque $S^ = \{\pm e_i^*\}$ (et donc $s^* = 1$) pour $x = \pm e_i$, $1 \leq i \leq 3$.*

Preuve. L'équivalence est triviale par $\gamma''_x = \sqrt{\min \Lambda \cdot \min(\Lambda^* \cap x^\perp)}$. On achève la preuve en passant au crible toutes les classes duales de dimension 3 ([1]). \square

Ainsi la fonction γ''_x prend exactement deux valeurs (γ''_+ et $\gamma''_- = \gamma'$) dans quatre classes duales correspondant à $s^* = 1$; à savoir $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(4, 1)$. Dans les 11 autres classes (dont trois avec $s^* = 1$), γ''_- et γ''_+ coïncident avec γ' . Ce qui implique que, dans ce cas, γ''_- et γ' sont confondues.

Bergé et Martinet ont établi que la constante $\gamma'_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ est atteinte sur les réseaux \mathbb{D}_3 et \mathbb{D}_3^* , de manière indépendante des travaux de Korkine et Zolotareff. Ceci fournit une démonstration pour la constante γ''_- .

L'étude de γ''_x dans les quatre classes duales ci-dessus permet d'obtenir le théorème de Korkine et Zolotareff sans être toutefois significativement plus simple.

Le cas de la dimension 4 se déduit du cas précédent, en utilisant la propriété 1 avec $n = 4$ et $k = 3$.

Théorème 4. *Pour la dimension 4, nous avons $\gamma''_{4,\pm} = \gamma'''_{4,\pm} = \sqrt{2}$. Cette valeur est atteinte uniquement sur le réseau \mathbb{D}_4 (qui est semblable à son dual).*

Preuve. Le résultat a été démontré par Korkine et Zolotareff pour la fonction γ''_+ . On vérifie aisément que le groupe des automorphismes de \mathbb{D}_4 agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux. En effectuant la première projection de la réduction d'Hermite, on arrive sur un réseau isométrique au dual de \mathbb{A}_3 . \square

5.2. Dimension 5, une conjecture.

Le cas de la dimension 5 n'est actuellement pas résolu. Il est fort probable que Korkine et Zolotareff aient tenté de prouver que $\gamma''_{5,+} = \sqrt{2}$. Comme nous avons vu dans la première partie, les contre-exemples de Blichfeldt infirment ce résultat. C'est dans cette famille de réseaux que l'on trouve, aujourd'hui encore, le réseau de dimension 5 réalisant la valeur record de la fonction γ''_+ . En utilisant la propriété 1 avec $n = 5$ et $k = 3$, ainsi que la valeur de $\gamma''_{3,+}$, on aboutit à l'inégalité $\gamma''_{5,+} \leq \frac{3}{2}$. Korkine et Zolotareff ont prouvé que l'inégalité est stricte [7]. Depuis, aucune amélioration de ce résultat n'a été publiée. Certes une étude approfondie, s'inspirant de la méthode de Korkine et Zolotareff en dimension 3, devrait nous permettre d'obtenir la valeur de la constante $\gamma''_{5,+}$. Malheureusement, la complexité et la taille du système d'inégalités rendent sa résolution illusoire. D'un autre côté, une étude locale, comme pour les invariants γ et γ' , n'est pas envisageable, vu le caractère discontinu de la fonction γ''_+ . Remarquons cependant que la valeur de γ''_- reste strictement inférieure à $\sqrt{2}$ pour tous les exemples dans lesquels γ''_+ dépasse $\sqrt{2}$, ce qui suggère la conjecture :

Conjecture. *La valeur de la constante $\gamma''_{5,-}$ est $\sqrt{2}$, valeur atteinte uniquement sur les réseaux parfaits \mathbb{D}_5 et $\mathbb{H}_5 = \mathbb{A}_5^3$ et leurs duaux.*

En utilisant la propriété 1 avec le couple $(n, k) = (6, 2)$ (respectivement $(7, 3)$ et $(8, 4)$), et sous l'hypothèse que la conjecture ci-dessus soit vraie, on obtient les inégalités

$$\gamma''_{6,-} \leq \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma''_{7,-} \leq \sqrt{3}, \quad \gamma''_{8,-} \leq 2.$$

Or, comme nous avons vu au paragraphe 2.5, ces valeurs sont atteintes sur les réseaux \mathbb{E}_6 respectivement \mathbb{E}_7 et \mathbb{E}_8 .

Conséquence. *Si la conjecture précédente est vraie, on a*

$$\gamma''_{6,-} = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma''_{7,-} = \sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \gamma''_{8,-} = 2,$$

valeurs atteintes sur les réseaux parfaits \mathbb{E}_6 et son dual, respectivement \mathbb{E}_7 et son dual, et \mathbb{E}_8 .

Des valeurs conjecturales des constantes $\gamma''_{n,-}$ pour $n = 5, 6, 7, 8$, on déduit tout de suite que $\gamma'_n = \gamma''_{n,-}$ pour $n = 5, 6, 7, 8$, ainsi que la liste des réseaux sur lesquels l'égalité a lieu¹.

Revenons à la constante d'Hermite. Les valeurs de cette dernière sont établies jusqu'à la dimension 8^2 et résulteraient immédiatement de la conjecture précédente, en partant de l'égalité $\gamma_4 = \sqrt{2}$, et en raisonnant par récurrence à l'aide de la propriété 3.

Les conséquences de la conjecture laissent penser que sa démonstration sera ardue. A cause de la discontinuité de γ'' les méthodes utilisées pour les constantes γ et γ' ne peuvent pas s'appliquer. Une caractérisation ou au moins une étude des points de discontinuité serait certainement profitable dans l'espoir de mener une analyse locale. Comme nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de connaître la géométrie du réseau pour caractériser les discontinuités; il faut connaître celle de tous ses projetés.

5.3. Les réseaux de racines.

Dans cette partie, nous énonçons les résultats concernant les réseaux de racines irréductibles. Comme le cas des réseaux \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 et \mathbb{E}_8 a déjà été traité au paragraphe 2.5, il nous suffit de considérer les deux familles infinies \mathbb{A}_n pour $n \geq 2$ et \mathbb{D}_n pour $n \geq 4$. Les démonstrations sont laissées aux soins du lecteur.

Théorème 5. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe, à isométrie près, une unique lamination et une unique antilamination du réseau \mathbb{A}_n et elles coïncident. La décomposition en somme de carrés de la réduction d'Hermite est*

$$2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots + \frac{1}{2}x_n)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \cdots + \frac{1}{3}x_n)^2 + \cdots + \\ \frac{k+1}{k}(x_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+1}x_n)^2 + \cdots + \frac{n+1}{n}x_n^2.$$

¹Cela a été démontré, par Poor et Yuen, qui ont obtenu les constantes γ'_n pour $n = 5, 6, 7$ (et 8); voir C. Poor, D.S. Yuen, *The Bergé-Martinet constant and slopes of Siegel cusp forms*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), 913–924.

²La dimension 24 est maintenant connue; voir H. Cohn, A. Kumar, *Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices*, preprint, arXiv :math.MG/0403263 (2004).

Les constantes γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} du réseau \mathbb{A}_n sont

$$\gamma''_{\pm}(\mathbb{A}_n) = \gamma'''_{\pm}(\mathbb{A}_n) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

[A isométrie près signifie à isométrie près de chacune des projections ou de chacune des sections.]

Théorème 6. *Pour tout entier $n \geq 4$, il existe, à isométrie près, deux laminations des réseaux \mathbb{D}_n (sauf pour le réseau \mathbb{D}_4 qui n'en admet qu'une seule) et une seule antilamination. Les deux laminations, bien que différentes, sont toutes deux également l'antilamination dont voici la décomposition en somme de carrés :*

$$\begin{aligned} & 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \cdots - \frac{1}{2}x_n)^2 + \\ & \frac{3}{2}(x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \cdots - \frac{1}{3}x_n)^2 + \\ & \frac{4}{3}(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \cdots - \frac{1}{2}x_n)^2 + \sum_{i=5}^n x_i^2. \end{aligned}$$

On obtient la seconde lamination du réseau en échangeant le troisième et le quatrième vecteur de base. Sa décomposition de Gauss-Lagrange est

$$\begin{aligned} & 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \cdots - \frac{1}{2}x_n)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \cdots - \frac{1}{3}x_n)^2 \\ & + \frac{4}{3}(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \cdots - \frac{1}{4}x_n)^2 + (x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \cdots - \frac{1}{5}x_n)^2 + \sum_{i=6}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Les constantes γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} des réseaux de racines \mathbb{D}_n sont

$$\gamma''_{\pm}(\mathbb{D}_n) = \gamma'''_{\pm}(\mathbb{D}_n) = \sqrt{2}.$$

On remarque que les invariants $\gamma''_{\pm}(\mathbb{D}_n)$ et γ' coïncident sur les réseaux de racines, que ceux de \mathbb{D}_n ne dépendent pas de n et que ceux de \mathbb{A}_n tendent vers cette dernière valeur pour $n \rightarrow \infty$.

Bibliographie

- [1] A.-M. BERGÉ, *Minimal vectors of pairs of dual lattices*. J. Number Theory **52** (1995), 284–298.
- [2] A.-M. BERGÉ et J. MARTINET, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres*. J. Number Theory **32** (1989), 14–42.
- [3] H.F. Blichfeldt, *The minimum value of positive quadratic forms in six, seven and eight variables*. Math. Z. **39** (1935), 1–15.
- [4] J.H. Conway et N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, Grundlehren **290**, Heidelberg (1988), ISBN 0-387-98794-0.
- [5] Carl Friedrich Gauss, *Recherches Arithmétiques (Disquisitiones Arithmeticae)*. Jacques Gabay, reprint 1989.

- [6] CH. HERMITE, *Lettre à Jacobi*. J. Reine Angew. Math **40** (1850), 261–278.
- [7] A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF, *Sur les formes quadratiques*. Math. Ann. **6** (1873), 366–389.
- [8] J.C. LAGARIAS, H.W. LENSTRA JR. et C.P. SCHNORR, *Korkine-Zolotarev bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice*. Combinatorica **10** (1990), 333–348.
- [9] J. MARTINET, *Perfect Lattices in Euclidean Spaces*. Springer-Verlag, Grundlehren 327, 2003, ISBN 3-540-44236-7.
- [10] CH. ZONG, *Sphere Packings*. Springer-Verlag, Universitext, 1999, ISBN 0-387-98794-0.

NOTE DE LA RÉDACTION

Le sujet de cet article a été proposé à l’auteur par François Sigrist comme sujet de thèse dans le cadre de l’Université de Neuchâtel. Il a fait l’objet d’une première rédaction en 1999, exposée à Bordeaux le 1^{er} décembre 2000 au Séminaire de Théorie des Nombres. Cette rédaction a été ensuite remaniée en 2002, avec la collaboration d’Anne-Marie Bergé. C’est à quelques détails près ce texte de 2002 qui a été soumis au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, à la demande du comité éditorial du journal, afin que soit mise à la disposition de la communauté mathématique la contribution de l’auteur à la réduction des formes quadratiques selon Hermite et Korkine-Zolotareff. Nous avons publié ici une version remaniée et notablement raccourcie du texte de 2002.

À propos de la réduction « HKZ », signalons l’article récent de R.A. Pendavigh et S.H.M. van Zam, *New Korkin-Zolotarev inequalities*, SIAM J. Optim. **18,1** (2007), 363–378.

Marc GINDRAUX
Office fédéral de la statistique
Espace de l’Europe 10
CH-2010 Neuchâtel, Suisse
E-mail: marc.gindraux@bfs.admin.ch